目　录

引　言…………………………………………………………………… (1)

第一章　仿射空间中的张量分析……………………………… (7)

§1.1　n 维仿射空间中的张量 ……………………………… (7)

§1.2　张量的对称性……………………………………… (11)

§1.3　矢量的平移和仿射联络……………………………… (13)

§1.4　张量的协变微商…………………………………… (15)

§1.5　测地线方程………………………………………… (18)

§1.6　曲率张量…………………………………………… (20)

第二章　黎曼(Riemann)几何 ………………………………… (23)

§2.1　黎曼空间和度规张量……………………………… (23)

§2.2　张量指标的升降…………………………………… (25)

§2.3　克里斯朵夫(Christoffel)联络 ……………………… (26)

§2.4　黎曼空间中的测地线……………………………… (28)

§2.5　黎曼空间的曲率张量……………………………… (30)

§2.6　毕安基(Bianchi)恒等式 …………………………… (32)

§2.7　李(Lie)微商 ……………………………………… (33)

§2.8　等度规映射和凯林(Killing)矢量场……………… (36)

第三章　相对论性的引力理论 ……………………………… (39)

§3.1　引力质量与惯性质量的等同性…………………… (39)

§3.2　等效原理…………………………………………… (41)

§3.3　引力几何化………………………………………… (43)

§3.4　弱引力场中的自由粒子…………………………… (44)

§3.5　爱因斯坦(Einstein)引力场方程 ………………… (47)

§3.6　场方程的牛顿近似………………………………… (49)

§3.7 谐和坐标条件………………………………………… (52)
§3.8 引力波……………………………………………… (55)
第四章 观测量的理论 ………………………………… (57)
§4.1 观测量作为标量………………………………… (57)
§4.2 时空间隔的测量和投影算符…………………… (58)
§4.3 物理的坐标系…………………………………… (63)
§4.4 四轴系和局域测量的一般概念………………… (66)
§4.5 两个观测者的测量的比较……………………… (69)
§4.6 局域惯性系条件………………………………… (71)
第五章 球对称的引力场 ……………………………… (74)
§5.1 球对称度规场的一般结构……………………… (74)
§5.2 席瓦西尔(Schwarzschild)外部解 …………… (77)
§5.3 伯克霍夫(Birkhoff)定理 ……………………… (80)
§5.4 席瓦西尔坐标的物理意义……………………… (81)
§5.5 引力源中的内引力场…………………………… (83)
第六章 粒子在球对称场中的运动 …………………… (87)
§6.1 时空对称性与守恒量…………………………… (87)
§6.2 席瓦西尔场中的运动方程……………………… (89)
§6.3 运动的分类……………………………………… (91)
§6.4 行星的轨道……………………………………… (95)
§6.5 光子轨线的引力偏折…………………………… (98)
§6.6 光频的引力红移 ……………………………… (103)
第七章 黑洞…………………………………………… (105)
§7.1 $r=2GM$ 球面上时空的非奇异性 …………… (105)
§7.2 引力半径内的时空结构 ……………………… (107)
§7.3 爱丁顿(Eddington)坐标 ……………………… (110)
§7.4 克鲁斯卡(Kruskal)坐标 ……………………… (113)
§7.5 球对称时空的全局结构 ……………………… (118)
§7.6 黑洞作为恒星演化的终局 …………………… (120)

§7.7 黑洞的分类 …………………………………… (122)
§7.8 黑洞动力学 …………………………………… (124)
§7.9 黑洞的辐射 …………………………………… (125)
第八章 宇宙学…………………………………… (129)
§8.1 宇宙学的基本事实 ……………………………… (129)
§8.2 宇宙动力学 …………………………………… (131)
§8.3 宇宙空间的曲率 ……………………………… (133)
§8.4 宇宙的年龄 …………………………………… (136)
§8.5 辐射为主的早期宇宙 ………………………… (140)
§8.6 背景辐射问题 ………………………………… (143)
§8.7 原初核合成问题 ……………………………… (146)
§8.8 正反物质的不对称问题 ……………………… (150)
§8.9 视界与平坦性疑难 …………………………… (153)
§8.10 甚早期宇宙的暴胀理论……………………… (156)
§8.11 宇宙常数问题………………………………… (161)
§8.12 暗物质问题…………………………………… (165)
§8.13 宇宙结构的形成问题………………………… (169)
附录Ⅰ 符号和约定…………………………………… (176)
附录Ⅱ 物理常数…………………………………… (177)

Contents

Introduction .... (1)

Chapter 1 Tensor analysis in affine space .... (7)

§ 1. 1 Tensor in affine space .... (7)

§ 1. 2 Symmetry of tensor .... (11)

§ 1. 3 Displacement of vector and affine connection .... (13)

§ 1. 4 Covariant derivative of tensors .... (15)

§ 1. 5 Equation of geodesics .... (18)

§ 1. 6 Curvature tensor .... (20)

Chapter 2 Riemannian geometry .... (23)

§ 2. 1 Riemannian space and metric tensor .... (23)

§ 2. 2 Raising and lowering tensorial indices .... (25)

§ 2. 3 Christoffel connection .... (26)

§ 2. 4 Geodesics in Riemannian space .... (28)

§ 2. 5 Curvature tensor in Riemannian space .... (30)

§ 2. 6 Bianchi identity .... (32)

§ 2. 7 Lie derivative .... (33)

§ 2. 8 Isometric mapping and killing vector field .... (36)

Chapter 3 Relativistic theory of gravitation .... (39)

§ 3. 1 Equality of gravitational mass and inertial mass .... (39)

§ 3. 2 Principle of equivalence ························ (41)
§ 3. 3 Geometrization of gravitation ················ (43)
§ 3. 4 Free particle in weak gravitational field ······ (44)
§ 3. 5 Einsteinian equation of gravitational field ··· (47)
§ 3. 6 Newtonian approximation of field equation ······································ (49)
§ 3. 7 Harmonic coordinate condition ················ (52)
§ 3. 8 Gravitational wave ······························ (55)

Chapter 4 Theory of measurement ························ (57)
§ 4. 1 Observable as a scalar ························ (57)
§ 4. 2 Measurement of space or time and projection operator ································ (58)
§ 4. 3 Physical coordinates ··························· (63)
§ 4. 4 Tetrad and local measurement ················· (66)
§ 4. 5 Comparision of measurements by two observers ·· (69)
§ 4. 6 Condition for local inertial frame ·············· (71)

Chapter 5 Spherically symmetric gravitational field ······ (74)
§ 5. 1 General structure of spherically symmetric metric field ······································ (74)
§ 5. 2 Schwarzschild exterior solution ················· (77)
§ 5. 3 Birkhoff theorem ································ (80)
§ 5. 4 Physical meaning of Schwarzschild coordinates ······································ (81)
§ 5. 5 Interior solution within gravitational source ·· (83)

Chapter 6 Free motion in spherically symmetric field … (87)

§ 6. 1 Symmetry of spacetime and conservative quantity …… (87)

§ 6. 2 Dynamical equation in Schwarzschild field …… (89)

§ 6. 3 Classification of motion …… (91)

§ 6. 4 Orbit of planets …… (95)

§ 6. 5 Gravitational deflection of photon orbit …… (98)

§ 6. 6 Gravitational red shift of light frequency … (103)

Chapter 7 Black holes …… (105)

§ 7. 1 Non-singular nature of spacetime at $r = 2GM$ sphere …… (105)

§ 7. 2 Spacetime structure within gravitational radius …… (107)

§ 7. 3 Eddington coordinates …… (110)

§ 7. 4 Kruscal coordinates …… (113)

§ 7. 5 Global structure of spherically symmetric spacetime …… (118)

§ 7. 6 Black hole as a final state of stellar evolution …… (120)

§ 7. 7 Classification of black holes …… (122)

§ 7. 8 Dynamical laws of black hole …… (124)

§ 7. 9 Radiation of black hole …… (125)

Chapter 8 Big bang cosmology …… (129)

§ 8. 1 Basic facts in cosmology …… (129)

§ 8. 2 Cosmological dynamics …… (131)

§ 8. 3 Curvature of cosmic space …… (133)

§ 8.4 Age of Universe ······ (136)
§ 8.5 Radiation dominated early universe ······ (140)
§ 8.6 Cosmic background radiation ······ (143)
§ 8.7 Big bang nucleosynthesis ······ (146)
§ 8.8 Asymmetry of matter with anti-matter ······ (150)
§ 8.9 Horizon puzzle and flatness puzzle ······ (153)
§ 8.10 Inflation in early universe ······ (156)
§ 8.11 Issue of cosmological constant ······ (161)
§ 8.12 Dark matter problem ······ (165)
§ 8.13 Structure formation in universe ······ (169)

Appendix 1 Signatures and conventions ······ (176)
Appendix 2 Physical constants ······ (177)

目　录

引　言 ………………………………………………………………………… (1)
第一章　仿射空间中的张量分析 ……………………………………………… (7)
§1.1　n 维仿射空间中的张量 ………………………………………… (7)
§1.2　张量的对称性 ………………………………………………… (11)
§1.3　矢量的平移和仿射联络 ……………………………………… (13)
§1.4　张量的协变微商 ……………………………………………… (15)
§1.5　测地线方程 …………………………………………………… (18)
§1.6　曲率张量 ……………………………………………………… (20)
第二章　黎曼(Riemann)几何 ………………………………………… (23)
§2.1　黎曼空间和度规张量 ………………………………………… (23)
§2.2　张量指标的升降 ……………………………………………… (25)
§2.3　克里斯朵夫(Christoffel)联络 ……………………………… (26)
§2.4　黎曼空间中的测地线 ………………………………………… (28)
§2.5　黎曼空间的曲率张量 ………………………………………… (30)
§2.6　毕安基(Bianchi)恒等式 …………………………………… (32)
§2.7　李(Lie)微商 ………………………………………………… (33)
§2.8　等度规映射和凯林(Killing)矢量场 ……………………… (36)
第三章　相对论性的引力理论 ……………………………………… (39)
§3.1　引力质量与惯性质量的等同性 ……………………………… (39)
§3.2　等效原理 ……………………………………………………… (41)
§3.3　引力几何化 …………………………………………………… (43)
§3.4　弱引力场中的自由粒子 ……………………………………… (44)
§3.5　爱因斯坦(Einstein)引力场方程 …………………………… (47)
§3.6　场方程的牛顿近似 …………………………………………… (49)

§3.7　谐和坐标条件…………………………………………（52）
§3.8　引力波…………………………………………………（55）
第四章　观测量的理论 ……………………………………（57）
§4.1　观测量作为标量…………………………………（57）
§4.2　时空间隔的测量和投影算符……………………（58）
§4.3　物理的坐标系……………………………………（63）
§4.4　四轴系和局域测量的一般概念…………………（66）
§4.5　两个观测者的测量的比较………………………（69）
§4.6　局域惯性系条件…………………………………（71）
第五章　球对称的引力场 …………………………………（74）
§5.1　球对称度规场的一般结构………………………（74）
§5.2　席瓦西尔(Schwarzschild)外部解 ……………（77）
§5.3　伯克霍夫(Birkhoff)定理 ………………………（80）
§5.4　席瓦西尔坐标的物理意义………………………（81）
§5.5　引力源中的内引力场……………………………（83）
第六章　粒子在球对称场中的运动 ………………………（87）
§6.1　时空对称性与守恒量……………………………（87）
§6.2　席瓦西尔场中的运动方程………………………（89）
§6.3　运动的分类………………………………………（91）
§6.4　行星的轨道………………………………………（95）
§6.5　光子轨线的引力偏折……………………………（98）
§6.6　光频的引力红移 …………………………………（103）
第七章　黑洞…………………………………………………（105）
§7.1　$r=2GM$ 球面上时空的非奇异性 ……………（105）
§7.2　引力半径内的时空结构 …………………………（107）
§7.3　爱丁顿(Eddington)坐标 ………………………（110）
§7.4　克鲁斯卡(Kruskal)坐标…………………………（113）
§7.5　球对称时空的全局结构 …………………………（118）
§7.6　黑洞作为恒星演化的终局 ………………………（120）

§7.7 黑洞的分类 …………………………………… (122)
§7.8 黑洞动力学 …………………………………… (124)
§7.9 黑洞的辐射 …………………………………… (125)
第八章 宇宙学…………………………………… (129)
§8.1 宇宙学的基本事实 …………………………… (129)
§8.2 宇宙动力学 …………………………………… (131)
§8.3 宇宙空间的曲率 ……………………………… (133)
§8.4 宇宙的年龄 …………………………………… (136)
§8.5 辐射为主的早期宇宙 ………………………… (140)
§8.6 背景辐射问题 ………………………………… (143)
§8.7 原初核合成问题 ……………………………… (146)
§8.8 正反物质的不对称问题 ……………………… (150)
§8.9 视界与平坦性疑难 …………………………… (153)
§8.10 甚早期宇宙的暴胀理论……………………… (156)
§8.11 宇宙常数问题………………………………… (161)
§8.12 暗物质问题…………………………………… (165)
§8.13 宇宙结构的形成问题………………………… (169)
附录Ⅰ 符号和约定…………………………………… (176)
附录Ⅱ 物理常数…………………………………… (177)

Contents

Introduction .... (1)

Chapter 1 Tensor analysis in affine space .... (7)

§ 1. 1 Tensor in affine space .... (7)

§ 1. 2 Symmetry of tensor .... (11)

§ 1. 3 Displacement of vector and affine connection .... (13)

§ 1. 4 Covariant derivative of tensors .... (15)

§ 1. 5 Equation of geodesics .... (18)

§ 1. 6 Curvature tensor .... (20)

Chapter 2 Riemannian geometry .... (23)

§ 2. 1 Riemannian space and metric tensor .... (23)

§ 2. 2 Raising and lowering tensorial indices .... (25)

§ 2. 3 Christoffel connection .... (26)

§ 2. 4 Geodesics in Riemannian space .... (28)

§ 2. 5 Curvature tensor in Riemannian space .... (30)

§ 2. 6 Bianchi identity .... (32)

§ 2. 7 Lie derivative .... (33)

§ 2. 8 Isometric mapping and killing vector field .... (36)

Chapter 3 Relativistic theory of gravitation .... (39)

§ 3. 1 Equality of gravitational mass and inertial mass .... (39)

§ 3. 2 Principle of equivalence ························ (41)
§ 3. 3 Geometrization of gravitation ················ (43)
§ 3. 4 Free particle in weak gravitational field ······ (44)
§ 3. 5 Einsteinian equation of gravitational field ··· (47)
§ 3. 6 Newtonian approximation of field equation ······································ (49)
§ 3. 7 Harmonic coordinate condition ················ (52)
§ 3. 8 Gravitational wave ····························· (55)

Chapter 4 Theory of measurement ························ (57)
§ 4. 1 Observable as a scalar ························ (57)
§ 4. 2 Measurement of space or time and projection operator ····························· (58)
§ 4. 3 Physical coordinates ··························· (63)
§ 4. 4 Tetrad and local measurement ················· (66)
§ 4. 5 Comparision of measurements by two observers ······································ (69)
§ 4. 6 Condition for local inertial frame ·············· (71)

Chapter 5 Spherically symmetric gravitational field ······ (74)
§ 5. 1 General structure of spherically symmetric metric field ······································ (74)
§ 5. 2 Schwarzschild exterior solution ················ (77)
§ 5. 3 Birkhoff theorem ······························· (80)
§ 5. 4 Physical meaning of Schwarzschild coordinates ···································· (81)
§ 5. 5 Interior solution within gravitational source ··· (83)

Chapter 6 Free motion in spherically symmetric field … (87)

§ 6. 1 Symmetry of spacetime and conservative quantity …… (87)

§ 6. 2 Dynamical equation in Schwarzschild field …… (89)

§ 6. 3 Classification of motion …… (91)

§ 6. 4 Orbit of planets …… (95)

§ 6. 5 Gravitational deflection of photon orbit …… (98)

§ 6. 6 Gravitational red shift of light frequency … (103)

Chapter 7 Black holes …… (105)

§ 7. 1 Non-singular nature of spacetime at $r = 2GM$ sphere …… (105)

§ 7. 2 Spacetime structure within gravitational radius …… (107)

§ 7. 3 Eddington coordinates …… (110)

§ 7. 4 Kruscal coordinates …… (113)

§ 7. 5 Global structure of spherically symmetric spacetime …… (118)

§ 7. 6 Black hole as a final state of stellar evolution …… (120)

§ 7. 7 Classification of black holes …… (122)

§ 7. 8 Dynamical laws of black hole …… (124)

§ 7. 9 Radiation of black hole …… (125)

Chapter 8 Big bang cosmology …… (129)

§ 8. 1 Basic facts in cosmology …… (129)

§ 8. 2 Cosmological dynamics …… (131)

§ 8. 3 Curvature of cosmic space …… (133)

§ 8.4 Age of Universe ······ (136)
§ 8.5 Radiation dominated early universe ······ (140)
§ 8.6 Cosmic background radiation ······ (143)
§ 8.7 Big bang nucleosynthesis ······ (146)
§ 8.8 Asymmetry of matter with anti-matter ······ (150)
§ 8.9 Horizon puzzle and flatness puzzle ······ (153)
§ 8.10 Inflation in early universe ······ (156)
§ 8.11 Issue of cosmological constant ······ (161)
§ 8.12 Dark matter problem ······ (165)
§ 8.13 Structure formation in universe ······ (169)

Appendix 1 Signatures and conventions ······ (176)
Appendix 2 Physical constants ······ (177)

变换式(1.1.3)是引入张量概念的基础.

当变换矩阵满足

$$\det\left|\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\right| \neq 0 \text{ 或 } \infty, \tag{1.1.4}$$

则有坐标微分的逆变换存在.它写作

$$\mathrm{d}x^{\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu}}\mathrm{d}\tilde{x}^{\mu}. \tag{1.1.5}$$

正变换矩阵与逆变换矩阵自然满足

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} = \delta^{\mu}_{\nu} \tag{1.1.6}$$

以及

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \tilde{x}^{\mu}}\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{1.1.7}$$

仿射空间中的逆变张量是这样定义的:

零阶逆变张量也叫标量,它满足

(a) 有 n^0 个分量.在坐标 x^{μ} 下它的值记为 T.

(b) 当坐标从 x^{μ} 变为 $\tilde{x}^{\mu}$,T 相应地变为 $\tilde{T}$,

$$\tilde{T}(\tilde{x}) = T(x), \tag{1.1.8}$$

其中 x 和 $\tilde{x}$ 是同一点的两组不同的坐标.(1.1.8)说明标量的值在坐标变换下保持不变.

一阶逆变张量也叫逆变矢量,它满足

(a) 有 n^1 个分量.在坐标 x^{μ} 下它的值记为 T^{μ}(μ 取 1 至 n).

(b) 当坐标从 x^{μ} 变为 $\tilde{x}^{\mu}$,T^{μ} 相应地变为 $\tilde{T}^{\mu}$,

$$\tilde{T}^{\mu} = \frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}T^{\alpha}. \tag{1.1.9}$$

就是说,它的变换规则与坐标微分相一致.

二阶逆变张量满足

(a) 有 n^2 个分量.在坐标 x^{μ} 下它的值记为 $T^{\mu\nu}$(μ 与 ν 各取 1 至 n).

(b) 当坐标从 x^μ 变为 $\tilde{x}^\mu$，$T^{\mu\nu}$ 相应地变为 $\tilde{T}^{\mu\nu}$，

$$\tilde{T}^{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}T^{\alpha\beta}. \quad (1.1.10)$$

即每一指标都按坐标微分的变换规律进行变化. 这正是逆变张量的基本特征. 更高阶的逆变张量的定义可以类推.

在仿射空间中还可以引入另一类张量叫协变张量. 它的基本特征是每一指标的变换规则与坐标微分的逆变换相一致. 为了在符号上加以区分，逆变张量的指标由上标标记，而协变张量的指标由下标标记.

由于零阶张量不随坐标变换而变，所以它没有逆变与协变的差别. 当坐标从 x^μ 变为 $\tilde{x}^\mu$，一阶协变张量 T_μ 相应变为 $\tilde{T}_\mu$，

$$\tilde{T}_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}T_\alpha. \quad (1.1.11)$$

类似地写出二阶协变张量的变换公式为

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}T_{\alpha\beta}. \quad (1.1.12)$$

这样任意阶协变张量的变换行为已自明了.

此外还可以定义既有逆变指标又有协变指标的混合张量. 最低阶的混合张量是二阶的. 它的变换规则是

$$\tilde{T}^\mu_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}T^\alpha_\beta. \quad (1.1.13)$$

一般讲，一个张量可以有 p 个逆变指标，q 个协变指标，即有形式

$$T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}.$$

我们将它称为 (p,q) 阶张量. 它的变换规则很容易直接写出. 这名称也适用于逆变张量 $(q=0)$，或协变张量 $(p=0)$.

上述张量定义的要点是说，一个数组是否构成张量在于它们在坐标变换下的行为. 作为例子，我们看在式(1.1.6)和(1.1.7)中已出现过的克龙涅克(Kroneker)符号

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu; \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{1.1.14}$$

可以证明它是一个(1,1)阶混合张量. 让我们用混合张量的变换式(1.1.13)来定义变换后的 $\tilde{\delta}^\mu_\nu$.

$$\tilde{\delta}^\mu_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \delta^\alpha_\beta = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\nu} = \delta^\mu_\nu. \tag{1.1.15}$$

可见在任一坐标下,它的取值都由(1.1.14)决定.

两个张量可以作加法、减法和乘法运算. 由于决定张量变换行为的矩阵是随不同点而不同的,所以必须在同一点上的两个张量间进行运算,才能使运算后的量保持张量的性质.

张量的加减法定义为相应分量的相加或相减,因此这两个张量必须同阶. 运算后仍得同一点上的同阶张量. 如

$$C^\mu_\nu = A^\mu_\nu \pm B^\mu_\nu. \tag{1.1.16}$$

张量的乘法叫外乘. 如(1,1)阶张量 A^μ_λ 和(1,0)阶张量 B^ν 的外乘定义为

$$C^{\mu\nu}_\lambda = A^\mu_\lambda B^\nu, \tag{1.1.17}$$

由定义直接可验证 $C^{\mu\nu}_\lambda$ 是(2,1)阶张量. 一般由 (p_1, q_1) 阶张量与 (p_2, q_2) 阶张量外乘后得到 (p_1+p_2, q_1+q_2) 阶张量.

对混合张量还可定义一种运算叫缩并,它让混合张量的某一对上下指标取相同值并求和. 如(2,1)阶张量 $A^{\mu\nu}_\lambda$ 可对 μ(或 ν)和 λ 缩并,得到

$$C^\nu = A^{\lambda\nu}_\lambda \tag{1.1.18}$$

或

$$D^\mu = A^{\mu\lambda}_\lambda. \tag{1.1.19}$$

缩并后的张量 C^ν 或 D^μ 都符合(1,0)阶张量的变换规律. 一般讲,(p, q) 阶张量在一次缩并后成为 $(p-1, q-1)$ 阶张量.

顺便说明一点,熟知的矢量间的内乘实际上是外乘后再缩并,因此不是一种新的运算. 值得注意的是必须在逆变矢量 A^μ 和协

变矢量 B_μ 间进行这运算. 运算后得到

$$C = A^\mu B_\mu.$$

它是一个标量. 由两个逆变(或协变)矢量是不能构成标量的.

张量不能定义除法运算. 但是如果有协变的关系式,如

$$A^\mu = B^\mu_\nu C^\nu,$$

又已知 A^μ 及 B^μ_ν 均为张量,则能证明 C^ν 也是张量. 这性质称为张量运算的商定理.

§1.2 张量的对称性

首先看二阶逆变张量 $T^{\mu\nu}$. 它的分量可用一矩阵表示

$$T^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & \cdots & T^{1n} \\ T^{21} & T^{22} & \cdots & T^{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T^{n1} & T^{n2} & \cdots & T^{nn} \end{bmatrix}.$$

如果它是对称矩阵,即

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \qquad (1.2.1)$$

那就叫张量 $T^{\mu\nu}$对它的指标 μ 和 ν 是对称的. 若它是反对称矩阵,即

$$T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu}, \qquad (1.2.2)$$

则叫张量 $T^{\mu\nu}$对它的指标 μ 和 ν 反称. 容易看出,当张量在某一坐标下是对称(或反称)的,那么在任一坐标下它都是对称(或反称)的. 重要的正是张量的对称性与坐标无关.

上述对称性质的讨论对协变张量也适用. 但是它对混合张量不适用. 当混合张量在一个坐标系中有对称性,在变换到另一个坐标系后,它一般不能保持对称性.

一个不对称的二阶逆变(或协变)张量总可分解成两部分之和,其一部分是对称张量,另一部分是反称张量. 即

$$T^{\mu\nu} = S^{\mu\nu} + A^{\mu\nu}, \qquad (1.2.3)$$

其中

$$S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}, \qquad (1.2.4)$$

$$A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}. \qquad (1.2.5)$$

这种分解容易唯一地确定下来．我们有

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} + T^{\nu\mu}) \equiv T^{(\mu\nu)}, \qquad (1.2.6)$$

$$A^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu}) \equiv T^{[\mu\nu]}. \qquad (1.2.7)$$

人们常常用圆括号表示对称组合，用方括号表示反对称组合．

对高阶张量，完全可以在上述意义下说它对某两个上标（或下标）是对称的或反称的．仍须注意，对一个上标一个下标说对称性没有意义，因这种对称性在坐标变换下不能保持．当不加限制地说某逆变（或协变）张量是对称的或反称的，那意指它对任一对上标（或下标）都是对称或反称的．如三阶的对称逆变张量应满足

$$T^{\mu\nu\lambda} = T^{\mu\lambda\nu} = T^{\lambda\nu\mu} = T^{\nu\mu\lambda}. \qquad (1.2.8)$$

而三阶的反称逆变张量则满足

$$T^{\mu\nu\lambda} = -T^{\mu\lambda\nu} = -T^{\lambda\nu\mu} = -T^{\nu\mu\lambda}. \qquad (1.2.9)$$

反称张量还具有如下常用的性质：

(a) 当任意两个指标取同样值时，张量的该分量为零．

(b) n 维空间中最高阶的反称张量是 n 阶的，这张量只有一个独立分量．如三维空间中的三阶反称张量 $T^{\mu\nu\lambda}$ 只有 T^{123} 是独立分量．其他不为零的分量均与它相等或等值异号．

(c) n 维空间中的 $n-1$ 阶反称张量只有 n^1 个独立分量．如三维空间中的二阶反称张量 $T^{\mu\nu}$ 的独立分量是 T^{12}、T^{23} 和 T^{31}．其他不为零的分量与它们之一相等或等值异号．

作为应用的例，我们讨论 n 维空间的体元．在空间某点取 n 个线性无关的矢量 ${}_1dx^\mu, {}_2dx^\mu, \cdots, {}_ndx^\mu$．可以用它们构成的行列式来定义一个 n 阶张量

$$T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \begin{vmatrix} {}_1\mathrm{d}x^{\mu_1} & {}_1\mathrm{d}x^{\mu_2} & \cdots & {}_1\mathrm{d}x^{\mu_n} \\ {}_2\mathrm{d}x^{\mu_1} & {}_2\mathrm{d}x^{\mu_2} & \cdots & {}_2\mathrm{d}x^{\mu_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ {}_n\mathrm{d}x^{\mu_1} & {}_n\mathrm{d}x^{\mu_2} & \cdots & {}_n\mathrm{d}x^{\mu_n} \end{vmatrix} \tag{1.2.10}$$

行列式的性质决定这张量是反称的. 它只有一个独立分量 $T^{12\cdots n}$. 这分量的绝对值就是 n 个矢量所构成的体元的体积.

§1.3 矢量的平移和仿射联络

前面曾指出，两个不同点上的张量相减后将失去张量的性质. 可是张量场的微分却正需要这样的相减. 为了使微分运算不破坏张量性质，必须引入一种新的操作，叫做张量的平移. 它能把 P 点(坐标为 x^μ)的张量平移至邻近点 Q(坐标为 $x^\mu+\mathrm{d}x^\mu$)而变成 Q 点的张量. 平移后再作减法，将仍能保持张量性质. 为实现这平移所要的新概念就是仿射联络.

为具体起见，我们从协变矢量的平移来引入仿射联络. 设有 P 点的协变矢量 $A_\mu(P)$. 它平移至 Q 点后相应的矢量记作 $A_\mu(P\to Q)$. 作为线性的理论，平移引起的改变 $\delta A_\mu(P)$ 应正比于 $A_\mu(P)$，并正比于位移 $\mathrm{d}x^\mu$. 这样，

$$\delta A_\mu(P) = A_\mu(P\to Q) - A_\mu(P) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P)A_\lambda(P)\mathrm{d}x^\nu. \tag{1.3.1}$$

这里的比例系数 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P)$ 就叫做 P 点的仿射联络. 我们要求 $A_\mu(P\to Q)$ 在 Q 点具有协变矢量的性质，这就是

$$\tilde{A}_\mu(P\to Q) = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\right)_Q A_\alpha(P\to Q). \tag{1.3.2}$$

利用变换矩阵的微分关系，

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\right)_Q = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu}\right)_P + \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial\tilde{x}^\mu\partial\tilde{x}^\nu}\right)_P \mathrm{d}\tilde{x}^\nu$$

$$= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\right)_P + \left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu}\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma}\right)_P dx^\sigma, \qquad (1.3.3)$$

(1.3.2)式可写作

$$\tilde{A}_\mu + \tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\tilde{A}_\lambda d\tilde{x}^\nu$$

$$= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} + \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu}\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma}dx^\sigma\right)(A_\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha\sigma}A_\beta dx^\sigma). \quad (1.3.4)$$

这里一切量的自变量都是 P 点的坐标，所以全部省略了. 考虑到 A_μ 和 dx^μ 都是 P 点的矢量，即有关系式

$$\tilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu}A_\beta, \quad d\tilde{x}^\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma}dx^\sigma.$$

代回(1.3.4)式，略去坐标微分的二级小量，并注意所得的式子对任意的 A_μ 和 dx^μ 都适用，我们得出

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\lambda}\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} = \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\rho}\frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\sigma} + \Gamma^\beta_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}. \qquad (1.3.5)$$

利用变换矩阵的性质(1.1.6)和(1.1.7)，可从(1.3.5)式解出 $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$，

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 x^\beta}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu}\frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\beta} + \Gamma^\beta_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu}\frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\beta}. \qquad (1.3.6)$$

这就是仿射联络所必须满足的变换公式. 从这公式看出，仿射联络不是张量(除非(1.3.6)式右边第一项为零). 容易看出，为了使 $A_\mu(P\to Q)$ 是 Q 点的矢量，仿射联络的变换公式(1.3.6)不仅是必要条件而且也是充分条件.

至此我们对仿射联络的唯一限制是它必须满足变换式(1.3.6). 因此，我们可以在某一组坐标下任意地给定一个仿射联络场 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$，然后用(1.3.6)式来定义其他坐标下的 $\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(\tilde{x})$，这样就在仿射空间中确立了一种联络.

用联络建立的平移操作也可以对其他阶张量进行. 看 P 点的逆变矢量 $A^\mu(P)$. 在确定联络后可以证明，

$$A^\mu(P\to Q) = A^\mu + \delta A^\mu = A^\mu - \Gamma^\mu_{\lambda\nu}A^\lambda dx^\nu \qquad (1.3.7)$$

是 Q 点的逆变矢量. (1.3.7)就是用联络对逆变矢量作平移的公式. 因更高阶张量的平移公式不需要用到,我们不再写出. 值得指出,标量是坐标变换下的不变量,因此它的平移不需要专门的操作.

仿射联络还有以下几点有用的性质,它们都是直接由联络的变换公式得出的.

(a) 在同一仿射空间中引入两种联络,记为${}_1\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$和${}_2\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$. 它们的差是(1,2)阶张量.

$$T^\lambda_{\mu\nu} \equiv {}_1\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - {}_2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = (1,2)\text{ 阶张量}. \qquad (1.3.8)$$

(b) 若联络${}_1\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$对 μ 和 ν 并不对称,那么${}_2\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv {}_1\Gamma^\lambda_{\nu\mu}$也是一种联络.

(c) 联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$的对称组合

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}) \qquad (1.3.9)$$

也是一种联络. 它叫对称联络,即对其下标是对称的.

(d)联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$的反称组合

$$\Gamma^\lambda_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2}(\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\mu}) \qquad (1.3.10)$$

是一个对下标反称的张量. 它叫仿射空间的挠率张量. 若挠率张量为零,则联络是对称的.

(e) 一个非对称的联络总可表为对称联络和挠率张量之和,即

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{(\mu\nu)} + \Gamma^\lambda_{[\mu\nu]}. \qquad (1.3.11)$$

§1.4 张量的协变微商

在张量平移概念的基础上,我们可以对张量场定义一种新的微商,它叫协变微商. 对张量场求协变微商后所得的量将仍具有张量的性质.

先看标量场的微商. $T(x)$对 x^μ 的普通微商用 $T_{,\mu}$表示:

$$T_{,\mu} \equiv \frac{\partial T}{\partial x^\mu}. \tag{1.4.1}$$

坐标变换后,$T_{,\mu}$变为 $\tilde{T}_{,\mu}$,

$$\tilde{T}_{,\mu} \equiv \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_\mu} = \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} = T_{,\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}. \tag{1.4.2}$$

这表明 $T_{,\mu}$是协变矢量. 因为标量场的普通微商自动具有张量性质,所以它就定义为标量场的协变微商. 协变微商用 $T_{;\mu}$表示,则有

$$T_{;\mu} = T_{,\mu}. \tag{1.4.3}$$

然后看协变矢量场 $T_\mu(x)$的微商. 它对 x^ν 的普通微商

$$T_{\mu,\nu}(x) \equiv \frac{\partial T_\mu(x)}{\partial x^\nu} = \lim_{Q\to P}\frac{T_\mu(Q) - T_\mu(P)}{\Delta x^\nu}$$

显然不再是一个张量. 为了使协变微商后的 $T_{\mu;\nu}$仍是张量,我们利用平移操作,把它定义为

$$T_{\mu;\nu} = \lim_{Q\to P}\frac{T_\mu(Q) - T_\mu(P\to Q)}{\Delta x^\nu}. \tag{1.4.4}$$

这样 $T_{\mu;\nu}$是一个(0,2)阶张量. 由协变矢量的平移公式(1.3.1),(1.4.4)式化为

$$T_{\mu;\nu} = T_{\mu,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}T_\lambda, \tag{1.4.5}$$

这就是协变矢量的协变微商公式. 注意,(1.4.5)式右边两项都不是张量,它们之差才是张量.

为了唯一地确定其他阶张量的协变微商,我们要求协变微商满足与普通微商一样的乘法规则,即

$$(A^{\cdots}_{\cdots}B^{\cdots}_{\cdots})_{;\lambda} = (A^{\cdots}_{\cdots;\lambda})(B^{\cdots}_{\cdots}) + (A^{\cdots}_{\cdots})(B^{\cdots}_{\cdots;\lambda}). \tag{1.4.6}$$

由这一要求及标量和协变矢量的协变微商公式(1.4.3)和(1.4.5),就可导出其他阶张量的协变微商公式.

看逆变矢量场 $A^\mu(x)$. 它与任意协变矢量场 $B_\mu(x)$可构成标量 $A^\mu B_\mu$. 利用标量的协变微商公式(1.4.3),我们有

$$(A^{\mu}B_{\mu})_{;\lambda} = (A^{\mu}B_{\mu})_{,\lambda}.$$

再用普通微商和协变微商的乘法规则，得

$$A^{\mu}_{;\lambda}B_{\mu} + A^{\mu}B_{\mu;\lambda} = A^{\mu}_{,\lambda}B_{\mu} + A^{\mu}B_{\mu,\lambda}. \tag{1.4.7}$$

对 $B_{\mu;\lambda}$ 用公式(1.4.5)，上式改写为

$$A^{\mu}_{;\lambda}B_{\mu} = A^{\mu}_{,\lambda}B_{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}A^{\alpha}B_{\mu}.$$

考虑到 B_{μ} 是任意矢量，于是有

$$A^{\mu}_{;\lambda} = A^{\mu}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}A^{\alpha}. \tag{1.4.8}$$

这就是逆变矢量的协变微商公式. 注意，如果对逆变矢量的协变微商用类似(1.4.4)式的定义，再利用逆变矢量的平移公式(1.3.7)，所得的结果是一样的.

对高阶张量也可类似地做. 如对二阶混合张量场 $T^{\mu}_{\nu}(x)$. 它与两个任意矢量场 A^{μ} 和 B_{μ} 可以构成标量 $T^{\mu}_{\nu}A^{\nu}B_{\mu}$. 因此有

$$(T^{\mu}_{\nu}A^{\nu}B_{\mu})_{;\lambda} = (T^{\mu}_{\nu}A^{\nu}B_{\mu})_{,\lambda}.$$

然后用乘法公式展开. 利用 A^{μ} 和 B_{μ} 的协变微商公式已经求出，我们就可得到 T^{μ}_{ν} 的协变微商公式

$$T^{\mu}_{\nu;\lambda} = T^{\mu}_{\nu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}T^{\rho}_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}T^{\mu}_{\rho}. \tag{1.4.9}$$

它的规律是对每一上标按逆变矢量的协变微商那样操作一次，而对每一下标按协变矢量的协变微商那样操作一次. 按这办法写出二阶逆变张量和协变张量的协变微商公式如下：

$$T^{\mu\nu}_{;\lambda} = T^{\mu\nu}_{,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}T^{\rho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\rho\lambda}T^{\mu\rho}, \tag{1.4.10}$$

$$T_{\mu\nu;\lambda} = T_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}T_{\rho\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}T_{\mu\rho}. \tag{1.4.11}$$

更高阶的情形不难类推.

作为应用，我们计算克龙涅克张量 δ^{μ}_{ν} 的协变微商. 按(1.4.9)式有

$$\delta^{\mu}_{\nu;\lambda} = \delta^{\mu}_{\nu,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\delta^{\rho}_{\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\delta^{\mu}_{\rho},$$

由于 δ^{μ}_{ν} 的分量是常数，所以上式右边第一项为零. 后两项是对消的，因为

$$\Gamma^{\mu}_{\rho\lambda}\delta^{\rho}_{\nu} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\delta^{\mu}_{\rho}.$$

这样得出结果：

$$\delta^{\mu}_{\nu;\lambda} = 0. \tag{1.4.12}$$

即克龙涅克张量 δ^{μ}_{ν} 的普通微商和协变微商都是零.

另一例子是证明 $A_{\mu,\nu}$的反称组合为张量. 由(1.4.5)式知

$$A_{[\mu;\nu]} - A_{[\mu,\nu]} = \Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]} A_{\lambda}, \tag{1.4.13}$$

上式左边是张量，右边第二项也是张量(注意 $\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}$是挠率张量)，因此 $A_{[\mu,\nu]}$必是张量. 顺便指出，当采用对称联络，即挠率张量为零，这时我们有

$$A_{[\mu;\nu]} = A_{[\mu,\nu]}. \tag{1.4.14}$$

§1.5 测地线方程

普通空间中的直线可定义为线上任意相邻两点的切矢量都相互平行的曲线. 把这概念推广到 n 维仿射空间，相应的曲线就叫测地线. 现在我们要导出测地线所满足的微分方程.

n 维空间的曲线由 n 个参量式描述，

$$x^{\mu} = x^{\mu}(\lambda), \quad \mu = 1,2,\cdots,n, \tag{1.5.1}$$

设其中 λ 是一个标量性的参量. 曲线上任一点的切矢量定义为

$$A^{\mu} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}, \tag{1.5.2}$$

它是一个逆变矢量. 令 P 和 Q 是曲线上的两个相邻点，它们的坐标为 x^{μ} 和 $x^{\mu}+\mathrm{d}x^{\mu}$. 为了使 P、Q 点上的切矢量能够比较，我们先把 P 点的切矢量 $A^{\mu}(P)$平移至 Q 点，变成 $A^{\mu}(P\to Q)$. 然后定义：若曲线上任意两相邻点 P 和 Q 的一切矢量满足

$$A^{\mu}(P \to Q) \,/\!/\, A^{\mu}(Q), \tag{1.5.3}$$

则这曲线叫测地线. 测地线条件(1.5.3)也可写作

$$A^{\mu}(Q) = (1 + f(\lambda)\mathrm{d}\lambda)A^{\mu}(P \to Q). \tag{1.5.4}$$

这里对比例因子按 $\mathrm{d}\lambda$ 作了展开，并保留至 $\mathrm{d}\lambda$ 的一级小量.

利用逆变矢量的平移公式(1.3.7)，我们有

$$A^{\mu}(P \to Q) = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{d}\lambda. \qquad (1.5.5)$$

由切矢量的微分公式，又有

$$A^{\mu}(Q) = A^{\mu}(P) + \mathrm{d}A^{\mu}(P) = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda} + \frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda^2}\mathrm{d}\lambda. \quad (1.5.6)$$

把(1.5.5)式和(1.5.6)式代入(1.5.4)，保留至一级小量，并加整理，得出

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\lambda} = f(\lambda) \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda}. \qquad (1.5.7)$$

这就是测地线的微分方程.

如果我们采用一类特殊的标量性参量，测地线方程将得到简化. 为看清这一点，考虑参量的变换

$$\lambda = \lambda(\sigma).$$

这时相应有

$$\frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma^2}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\lambda^2}.$$

于是，测地线方程(1.5.7)改变为

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\sigma}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma}\left(f(\lambda)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda} - \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\lambda^2}\right). \qquad (1.5.8)$$

从(1.5.8)式看出，若让参量变换满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\lambda^2} = f(\lambda)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\lambda}, \qquad (1.5.9)$$

测地线方程将简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}\sigma} \frac{\mathrm{d}x^{\beta}}{\mathrm{d}\sigma} = 0. \qquad (1.5.10)$$

这样的标量性参量叫仿射参量.

最后指出仿射参量的两点性质.

(a) 对比(1.5.7)和(1.5.10)式看出，当采用仿射参量 σ 时有

$f(\sigma)=0$. 再由(1.5.4)式知,这时的测地线条件是

$$A^\mu(Q) = A^\mu(P\to Q), \tag{1.5.11}$$

这里 $A^\mu\equiv\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\sigma}$.

(b) 仿射参量并不唯一. 若 σ 与 $\tilde{\sigma}$ 是两种不同的仿射参量,(1.5.9)式告诉我们,它们之间的变换满足

$$\frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\tilde{\sigma}^2}=0, \tag{1.5.12}$$

即仿射参量的变换只能是线性变换.

§1.6 曲率张量

我们已经知道,联络是决定空间几何性质的重要量,但它不是张量. 挠率是由联络构成的重要张量. 下面将指出,由联络还能构造出另一个重要的张量,它叫曲率张量.

我们借助协变微商来引入曲率张量. 看任一协变矢量场 $A_\mu(x)$ 的二阶协变微商.

$$\begin{aligned}A_{\lambda;\mu;\nu} &= A_{\lambda;\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}A_{\rho;\mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}\\ &= A_{\lambda,\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\mu,\nu}A_\rho - \Gamma^\rho_{\lambda\mu}A_{\rho,\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu}A_{\rho,\mu}\\ &\quad + \Gamma^\rho_{\lambda\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\mu}A_\sigma - \Gamma^\rho_{\mu\nu}A_{\lambda;\rho}.\end{aligned} \tag{1.6.1}$$

取 $A_{\lambda;\mu;\nu}$ 对 μ 和 ν 的反称组合,它可以整理成

$$\begin{aligned}A_{\lambda;[\mu;\nu]} &= \frac{1}{2}(A_{\lambda;\mu;\nu} - A_{\lambda;\nu;\mu})\\ &= \frac{1}{2}(R^\rho_{\lambda\mu\nu}A_\rho - 2\Gamma^\rho_{[\mu\nu]}A_{\lambda;\rho}),\end{aligned} \tag{1.6.2}$$

其中

$$R^\rho_{\lambda\mu\nu} \equiv -\Gamma^\rho_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\Gamma^\rho_{\sigma\mu}. \tag{1.6.3}$$

(1.6.2)式左边是张量,右边第二项也是张量,因此 $R^\rho_{\lambda\mu\nu}$ 必是张量. 它就叫曲率张量. (1.6.2)式说明,当曲率和挠率都等于零(注意,因为它们都是张量,这条件与坐标的选取无关),A_μ 的两次协变微

商才可以变换次序.

由定义式(1.6.3)可看出曲率张量的两点性质. 首先,它完全由联络和联络的一阶微商所决定. 其次,它对下标 μ 和 ν 是反称的,即

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = - R^{\rho}_{\lambda\nu\mu}. \qquad (1.6.4)$$

曲率作为(1,3)阶张量,它可以缩并. 独立的缩并方式有两种. 一种得出

$$A_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\lambda\mu\nu}, \qquad (1.6.5)$$

另一种得出

$$R_{\mu\nu} \equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}. \qquad (1.6.6)$$

由于有(1.6.4)的反称性质,$R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$不给出新的张量.

曲率与挠率一起,构成了刻画空间弯曲情况的基本张量. 如果在空间某区域 V 内曲率张量和挠率张量都恒等于零,那可以证明,总能找到一个适当的坐标变换 $x^{\mu}\to\tilde{x}^{\mu}$,使得

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} = 0, \quad 在 V 内. \qquad (1.6.7)$$

我们不证明这定理,仅仅指出它的含意. 在 V 内的联络为零,由矢量平移公式看出

$$\delta A_{\mu} = 0. \qquad (1.6.8)$$

这表明在 V 内矢量的平移不改变其分量. 此外,测地线方程简化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^{\mu}}{\mathrm{d}\sigma^2} = 0, \qquad (1.6.9)$$

即在 V 内测地线是直线. 由于这些性质,人们称 V 内的空间是平坦的. 这也就是说,上述定理告诉我们,曲率和挠率张量是否都为零是空间是否平坦的标志.

值得指出一点,由张量定义看出,当张量在某一坐标下为零,则在一切坐标下均为零. 联络不是张量,从联络的变换公式看出,它在某一坐标下为零,在其他坐标下一般不为零. 这正是人们要引用曲率张量和挠率张量来刻画空间几何性质的原因.

最后顺便说明，曲率张量还可以由别的途径来引入. 为此我们考虑矢量 A^μ 沿闭合路径的平移. 令 $\mathrm{d}x^\mu$ 和 δx^μ 是 P 点的两个无穷小位移(图 1.1). 把 P 点的矢量 A^μ 平移 $\mathrm{d}x^\mu$ 至 Q，再平移 δx^μ 至 M，再平移 $-\mathrm{d}x^\mu$ 至 N，最后平移 $-\delta x^\mu$ 回到 P 点. 返回 P 点后，A^μ 变成了 $A^\mu+\delta A^\mu$. 由平移的定义决定，δA^μ 仍是 P 点的矢量. 用直截了当的计算算出这沿闭合路径平移后的增量为

$$\delta A^\mu = -\frac{1}{2}R^\lambda_{\rho\mu\nu}A^\rho(\mathrm{d}x^\mu\delta x^\nu - \mathrm{d}x^\nu\delta x^\mu), \qquad (1.6.10)$$

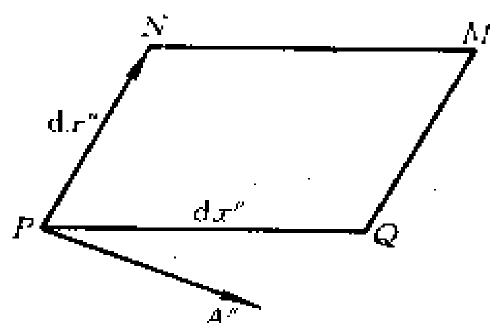


图 1.1　矢量沿闭合路径平移

其中 $R^\lambda_{\rho\mu\nu}$ 正是由(1.6.3)定义的曲率张量. 它的张量性也可从(1.6.10)看出. 这讨论还告诉我们，若区域 V 内曲率为零，则矢量沿 V 内的任一回路平移而回到出发点时矢量的增量为零. 或者说，矢量从 V 内一点平移至 V 内另一点，它的增量与路径无关，只要路径全部在 V 内.

第二章　黎曼(Riemann)几何

在仿射空间中引入度规场和不变距离，就构成了黎曼空间. 这章要讨论的是黎曼空间的几何和黎曼空间中的张量分析.

§2.1　黎曼空间和度规张量

我们用二次型

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.1.1}$$

来定义空间相邻两点(坐标差为 dx^μ)的距离 ds. 规定 ds 与坐标无关，即是标量. 这样 $g_{\mu\nu}$ 就是二阶的协变张量，它叫度规张量. 为确定起见，令 $g_{\mu\nu}$ 是对称张量，

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \tag{2.1.2}$$

否则，$g_{\mu\nu}$ 的反称组合对 ds 没有贡献，因而是不确定的和没有意义的. 在仿射空间中确立了度规场后，空间任意两相邻点的距离有了意义，这样的空间就叫黎曼空间.

我们熟知的三维欧氏空间是黎曼空间的特例. 在欧氏空间采用笛卡儿坐标 $x^1=x$，$x^2=y$ 和 $x^3=z$，相邻点的距离公式是

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.1.3}$$

这就是说度规张量是

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.1.4}$$

这张量的分量值与空间点无关. 当在欧氏空间采用球坐标 $x^1=r$，$x^2=\theta$ 和 $x^3=\varphi$，距离公式变为

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \tag{2.1.5}$$

相应的度规张量是

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{2.1.6}$$

这张量的分量是与点有关的．在欧氏空间中采用笛卡儿坐标的好处正在这里．

另一熟知的例是四维的闵柯夫斯基（Minkowski）空间，它是黎曼空间的又一特例．取坐标 $x^0=ct, x^1=x, x^2=y$ 和 $x^3=z$，不变距离公式是

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{2.1.7}$$

即度规张量是

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu}. \tag{2.1.8}$$

对一个黎曼空间，如能适当选取坐标，使它的度规张量具有形式：

$$g_{\mu\nu} = \begin{cases} +1 \text{ 或 } -1, & \mu = \nu; \\ 0, & \mu \neq \nu, \end{cases} \tag{2.1.9}$$

则叫它是平坦的黎曼空间（它与第一章 § 1.6 中讲的平坦性的关系将在后面看到）．

线性代数中有一条定理与这问题很有关系．下面把它叙述成我们所要的形式．

定理：对常系数的二次型

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

若 $\det|g_{\mu\nu}| \neq 0$，则必能找到坐标变换，把这二次型化为坐标微分的平方和（或差）．亦即使变换后的系数 $g_{\mu\nu}$ 满足（2.1.9）．

在黎曼空间中 $g_{\mu\nu}$ 一般不是常数．这时上述定理告诉我们，总

可以用坐标变换把任一 P 点的度规 $g_{\mu\nu}(P)$ 化成(2.1.9)的形式
这定理还有一推论：如果区域 V 内度规张量场是常数，那么 V 内的空间是平坦的.

关于平坦性，最重要的问题是怎么判断度规场能或不能变成(2.1.9)的形式. 这问题将在本章的 § 2.5 中回答.

§ 2.2 张量指标的升降

在黎曼空间中，某点上的逆变矢量 T^μ 可借助该点的度规张量来定义相应的协变矢量，

$$T_\mu \equiv g_{\mu\nu} T^\nu. \tag{2.2.1}$$

其他有逆变指标的张量也可做同样的操作，如

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} T^\alpha_{\ \nu}. \tag{2.2.2}$$

这叫张量指标的下降.

当 $\det|g_{\mu\nu}| \neq 0$，我们可以定义逆变的度规张量 $g^{\mu\nu}$，它满足

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda. \tag{2.2.3}$$

利用 $g^{\mu\nu}$，就可以作张量指标上升的操作，如

$$T^\mu \equiv g^{\mu\nu} T_\nu, \tag{2.2.4}$$

$$T^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha} T^\nu_{\ \alpha}. \tag{2.2.5}$$

总之，利用度规可以把任一个张量形式的物理量或几何量表示成逆变的、协变的或混合的形式. 这是黎曼空间中的张量的新性质. 下面两个例子是该性质的应用.

例 1 任一矢量可借助度规而构成一个标量

$$g_{\mu\nu} T^\mu T^\nu = T_\nu T^\nu = g^{\mu\nu} T_\mu T_\nu, \tag{2.2.6}$$

这标量叫矢量长度的平方.

例 2 不变距离可写作

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu = g^{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu. \tag{2.2.7}$$

中间一式表明度规的混合张量形式是克龙涅克张量，

$$g^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{2.2.8}$$

这一点也可从(2.2.3)式看出.

§2.3 克里斯朵夫(Christoffel)联络

仿射空间中借助联络定义了矢量的平移.黎曼空间中进一步要求平移操作保持矢量的长度不变.这一性质在欧氏空间中是自然具有的.本节将证明,如采用对称联络,那满足这附加要求的联络完全由度规场决定.这种联络叫克里斯朵夫联络.

考虑 P 点的逆变矢量 $A^{\mu}(P)$.借助联络 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$把它平移至邻点 Q 而成为 $A^{\mu}(P\to Q)$,

$$A^{\mu}(P \to Q) = A^{\mu}(P) - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(P)A^{\nu}(P)\mathrm{d}x^{\lambda}. \tag{1.3.7}$$

若平移不改变矢量长度,则

$$\begin{aligned} & g_{\mu\nu}(Q)A^{\mu}(P \to Q)A^{\nu}(P \to Q) \\ & \quad = g_{\mu\nu}(P)A^{\mu}(P)A^{\nu}(P). \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

由度规场的微分公式

$$g_{\mu\nu}(Q) = g_{\mu\nu}(P) + g_{\mu\nu,\lambda}(P)\mathrm{d}x^{\lambda}, \tag{2.3.2}$$

把(1.3.7)和(2.3.2)式代入(2.3.1),保留一级小量,再注意 A^{μ} 是任意矢量,我们得到

$$g_{\mu\nu,\lambda} - g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} - g_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\nu\lambda} = 0. \tag{2.3.3}$$

这是能保持长度的联络所必须满足的方程.

(2.3.3)式对 μ 和 ν 是对称的,因此它只包含 $n^2(n+1)/2$ 个独立的方程.可是联络 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$有 n^3 个独立分量.所以(2.3.3)式不足以确定联络.如果我们规定联络是对称的,即限于讨论挠率为零的空间,那联络的独立分量也是 $n^2(n+1)/2$ 个.这时联络将完全被度规场确定,并可由(2.3.3)式解出.

用指标的循环替换 $\mu\to\nu\to\lambda\to\mu$,(2.3.3)式可写成

$$g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\alpha\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\nu\mu} - g_{\nu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = 0 \tag{2.3.4}$$

及

$$g_{\lambda\mu,\nu} - g_{\alpha\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} - g_{\lambda\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = 0. \tag{2.3.5}$$

把(2.3.3)式与(2.3.4)式相加，再减去(2.3.5)式，注意联络是对称的，我们解出

$$\Gamma_{\nu\lambda\mu} \equiv g_{\alpha\nu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}). \tag{2.3.6}$$

它也可以化成

$$\Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}). \tag{2.3.7}$$

这些公式说明，若在黎曼空间内确定了度规，并采用对称联络，那这联络完全由度规和它的普通微商决定. 这样的联络叫克里斯朵夫联络.

顺便指出，(2.3.3)式可利用协变微商的定义而写成(参看(1.4.11)式)

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \tag{2.3.8}$$

再利用(2.2.3)式和(1.4.12)式，可得出

$$g^{\mu\nu}_{\ ;\lambda} = 0. \tag{2.3.9}$$

这说明度规张量在协变微商下的行为和常数张量在普通微商下的行为是一样的.

由于广义相对论所用的是无挠率的黎曼空间，因此以后我们将限于讨论对称联络. 这时有一条重要的定理：在坐标 x^μ 下 P 点的联络为 $(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})_P$. 我们总可找到坐标变换 $x^\mu \to \tilde{x}^\mu$，使得

$$(\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu})_P = 0. \tag{2.3.10}$$

证明如下：让坐标变换 $x^\mu \to \tilde{x}^\mu$ 满足

$$x^\mu - x^\mu_P = \tilde{x}^\mu + \frac{1}{2}C^{\mu}_{\alpha\beta}\tilde{x}^\alpha\tilde{x}^\beta, \tag{2.3.11}$$

其中 $C^{\mu}_{\alpha\beta} = C^{\mu}_{\beta\alpha}$，且都是常数. P 点的旧坐标是 x^μ_P，新坐标 $\tilde{x}^\mu_P = 0$. 由(2.3.11)算出

$$\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\lambda}}\right)_{P}=\delta_{\lambda}^{\mu}, \quad \left(\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)_{P}=\delta_{\lambda}^{\mu},$$

以及

$$\left(\frac{\partial^{2} x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\lambda} \partial \tilde{x}^{\nu}}\right)_{P}=C_{\lambda\nu}^{\mu}.$$

把算得的这些结果代入联络变换式(1.3.6),得到

$$(\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda})_{P}=(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{P}+C_{\mu\nu}^{\lambda}.$$

因此只要令 $C_{\mu\nu}^{\lambda}=-(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda})_{P}$,(2.3.10)就得到了满足.

我们来看这定理的含意.若在坐标 x^{μ} 下 P 点的联络为零,由(2.3.3)看出

$$(g_{\mu\nu,\lambda})_{P}=0,$$

即在 P 点附近 $\mathrm{d}x^{\mu}$ 的二级小量可忽略的小区域内 $g_{\mu\nu}$ 近似为常数.回忆本章§2.1中讲过,$g_{\mu\nu}$ 为常数的区域是平坦的.这样导致结论:对采用对称联络的黎曼空间中的任一点 P,总可找到一组适当的坐标,使得从这组坐标看来 P 点的领域是近似地平坦的.这个结论正是广义相对论的等效原理的数学基础.

§2.4 黎曼空间中的测地线

第一章§1.5中指出,当采用仿射参量,测地线方程将有简单的形式(1.5.10).现在我们利用黎曼空间中的度规张量来引入这个仿射参量.

对任一条曲线可以引入一个标量积分

$$s=\int_{P_0}^{P}\mathrm{d}s, \tag{2.4.1}$$

其中 $\mathrm{d}s$ 是曲线上相邻两点的不变距离,P_0 是曲线上的固定点,P 是曲线上的任意点.这 s 叫曲线上 P_0 至 P 的固有长度.它是标志曲线上的点的一个自然的标量性参量.

以 s 为参量,切矢量 u^{μ} 定义为

$$u^{\mu} = \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}s}. \tag{2.4.2}$$

由(2.1.1)式知，这切矢量总是单位矢量，即

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = 1. \tag{2.4.3}$$

对(2.4.3)式求协变微商，注意到 $g_{\mu\nu;\lambda}=0$，则有

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}_{;\lambda}u^{\nu} + g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu}_{;\lambda} = 0.$$

这式中左边的两项是相等的，于是得到

$$u_{\nu}u^{\nu}_{;\lambda} = 0. \tag{2.4.4}$$

我们先把测地线方程写成

$$\frac{\mathrm{d}u^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma} = f(s)u^{\mu}. \tag{2.4.5}$$

解出 $f(s)$，

$$f(s) = u_{\mu}\left(\frac{\mathrm{d}u^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}\right). \tag{2.4.6}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}u^{\mu}}{\mathrm{d}s} = u^{\mu}_{,\sigma}u^{\sigma}, \tag{2.4.7}$$

我们有

$$f(s) = u_{\mu}(u^{\mu}_{,\sigma}u^{\sigma} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}) = u_{\mu}u^{\mu}_{;\sigma}u^{\sigma} = 0.$$

这就证明了 s 是仿射参量. 相应的测地线方程是

$$\frac{\mathrm{d}u^{\mu}}{\mathrm{d}s} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}u^{\rho}u^{\sigma} = 0. \tag{2.4.8}$$

黎曼空间中的测地线还有一个重要的性质. 对空间任意两点 A 和 B 定义泛函

$$L = \int_{A}^{B}\mathrm{d}s,$$

积分沿过 A 和 B 的任一曲线来作. L 的几何意义是该曲线的固有长度. 可以证明，过 A 和 B 的测地线使 L 取极值. 回忆欧氏空间中两点间直线最短. 于是我们从另一角度又看到了测地线是欧氏空间中直线概念的推广.

§2.5 黎曼空间的曲率张量

在第一章§1.6中已指出，曲率张量是由联络和联络的一级微商构成的张量. 现在我们来看在采用克里斯朵夫联络的黎曼空间的曲率张量，即黎曼张量具有哪些新的性质.

由曲率张量的定义(1.6.3)看出，当联络是对称的，曲率张量不仅有对称性

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = - R^{\rho}_{\lambda\nu\mu}, \tag{1.6.4}$$

它还有一个新的对称关系

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} + R^{\rho}_{\mu\nu\lambda} + R^{\rho}_{\nu\lambda\mu} = 0. \tag{2.5.1}$$

为了进一步利用对称性，我们引用(0,4)阶的曲率张量

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} \equiv g_{\rho\sigma} R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu}, \tag{2.5.2}$$

将(1.6.3)式代入(2.5.2)式，发现 $R_{\rho\lambda\mu\nu}$ 具有下面四组对称性质：

(a)对 μ 和 ν 反称，

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = - R_{\rho\lambda\nu\mu}. \tag{2.5.3}$$

(b)对 ρ 和 λ 反称，

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = - R_{\lambda\rho\mu\nu}. \tag{2.5.4}$$

(c)对 $\rho\lambda$ 和 $\mu\nu$ 对称，

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\lambda}. \tag{2.5.5}$$

(d)对 $\lambda\mu\nu$ 反称，它可表为

$$R_{\rho\lambda\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\lambda} + R_{\rho\nu\lambda\mu} = 0. \tag{2.5.6}$$

我们利用这些对称性质来分析 $n=4$(广义相对论所要的情形)时曲率张量的独立分量的个数. 看 $R_{\rho\lambda\mu\nu}$. 由(2.5.3)，$\mu\nu$ 只有6种取值才可能使 $R_{\rho\lambda\mu\nu}$ 的分量独立，如

$$\mu\nu = 01,02,03,12,13,23.$$

由式(2.5.4)，$\rho\lambda$ 也同样只有这6种取值. 再由式(2.5.5)，$\rho\lambda\mu\nu$ 有 $C^2_6 = 7\times 6/2 = 21$ 种取值使 $R_{\rho\lambda\mu\nu}$ 有独立分量. 最后看(2.5.6)，考虑到上述对称性质后，它只提供一个独立的限制条件，即

$$R_{0123}+R_{0231}+R_{0312}=0.$$

因此四维黎曼空间的 $R_{\mu\lambda\rho\nu}$ 共有 20 个独立分量.

然后转向讨论黎曼张量的缩并. 在第一章 § 1.6 中引入过缩并

$$A_{\rho\nu}\equiv R^{\lambda}_{\lambda\rho\nu}. \tag{1.6.5}$$

由于黎曼张量的对称性(2.5.4), $A_{\rho\nu}\equiv 0$. 这样唯一非零的缩并是

$$R_{\mu\nu}\equiv R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda}. \tag{1.6.6}$$

它叫里契(Ricci)张量. 由于

$$R_{\mu\nu}=g^{\lambda\alpha}R_{\alpha\mu\nu\lambda}=g^{\lambda\alpha}R_{\nu\lambda\alpha\mu}=g^{\lambda\alpha}R_{\lambda\nu\mu\alpha},$$

所以里契张量是对称的.

$$R_{\mu\nu}=R_{\nu\mu}. \tag{2.5.7}$$

里契张量还可以在上升一个指标后作缩并,

$$R\equiv g^{\mu\nu}R_{\nu\mu}=R^{\mu}_{\mu}. \tag{2.5.8}$$

这 R 叫标量曲率. 爱因斯坦引入了一个组合,

$$G_{\mu\nu}\equiv R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \tag{2.5.9}$$

这 $G_{\mu\nu}$ 叫爱因斯坦张量,它也是对称张量. 爱因斯坦张量在建立广义相对论的引力场方程中有特殊作用,我们将在下一章中看到.

最后我们用空间平坦性的判据问题的讨论来结束这一节.

按第一章 § 1.6,由于现在采用对称联络,因此只要条件

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}=0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}), \tag{2.5.10}$$

就一定可以找到适当的坐标,使得

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}=0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}),$$

即

$$g_{\mu\nu,\lambda}=0 \quad (\text{在 } V \text{ 内}).$$

再按本章 § 2.1,当在 V 内 $g_{\mu\nu}$ 是常数,我们总可以把它化成(2.1.9)的对角形式,即 V 内的空间是平坦的. 概括起来说,黎曼空间的平坦性判据是黎曼张量等于零(即(2.5.9)式). 当空间是平坦的,我们总可找到一组坐标,使得度规具有闵柯夫斯基度规的形式. 这

一结论对广义相对论是非常重要的.

§2.6 毕安基(Bianchi)恒等式

由黎曼张量的定义

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} \qquad (1.6.3)$$

就可以证明,它的一阶协变微商必定满足一个循环关系

$$R^{\rho}_{\lambda\mu\nu;\sigma} + R^{\rho}_{\lambda\nu\sigma;\mu} + R^{\rho}_{\lambda\sigma\mu;\nu} = 0. \qquad (2.6.1)$$

这关系叫毕安基恒等式.

因张量方程的成立与否与坐标选取无关,我们采用使某任意点 P 上联络为零的坐标来证明. 直接对(1.6.3)式求协变微商,在 P 点有

$$\begin{aligned} R^{\rho}_{\lambda\mu\nu;\sigma} &= -\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu;\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\mu;\sigma} \\ &= -\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu,\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\mu,\sigma}. \end{aligned} \qquad (2.6.2)$$

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(P)=0$ 使上述微商结果大大简化了. 有了式(2.6.2),关系式(2.6.1)几乎是自明的了. 这样我们就证明了对空间任一点毕安基恒等式都成立.

对毕安基恒等式(2.6.1)中的 ρ 与 σ 缩并,注意黎曼张量对它的后两个下标为反称,则有

$$R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu;\sigma} + R_{\lambda\nu;\mu} - R_{\lambda\mu;\nu} = 0. \qquad (2.6.3)$$

把(2.6.3)式乘上 $g^{\nu\lambda}$,即把指标 λ 或 ν 上升后再缩并,利用 $g^{\nu\lambda}_{;\sigma}=0$,得到

$$(g^{\nu\lambda}R^{\sigma}_{\lambda\mu\nu})_{;\sigma} + (g^{\nu\lambda}R_{\lambda\nu})_{;\mu} - (g^{\nu\lambda}R_{\lambda\mu})_{;\nu} = 0.$$

我们把它化简,并整理成

$$\left(R^{\nu}_{\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\nu}_{\mu}R\right)_{;\nu} = 0. \qquad (2.6.4)$$

这式子说明爱因斯坦张量的协变散度恒等于零. 爱因斯坦引入这组合时所要的正是这一性质.

§ 2.7 李(Lie)微商

这节是要引入在概念上与协变微商完全不同的另一种微商，它叫李微商. 作为准备，我们先建立一个映射的概念.

前面我们一直把 $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ 的关系式

$$\tilde{x}^\mu = \tilde{x}^\mu(x^\sigma) \tag{2.7.1}$$

解释为坐标变换. 即 x^μ 和 $\tilde{x}^\mu$ 是空间同一点的新旧坐标. (2.7.1)式也可以被赋予一种完全不同的含意：在选定的一种坐标系下，x^μ 和 $\tilde{x}^\mu$ 代表两个不同的点，(2.7.1)式给出空间中点与点的一种一一对应关系，这种关系叫同一空间内的映射.

我们将讨论无穷小映射，即对应点的坐标差是无穷小量. 它的一般表示式为

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu, \tag{2.7.2}$$

这里 $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$ 是一个任意给定的矢量场，ε 是一个无穷小参量. ξ^μ 称为无穷小映射的生成元，因为它完全决定了一个无穷小映射.

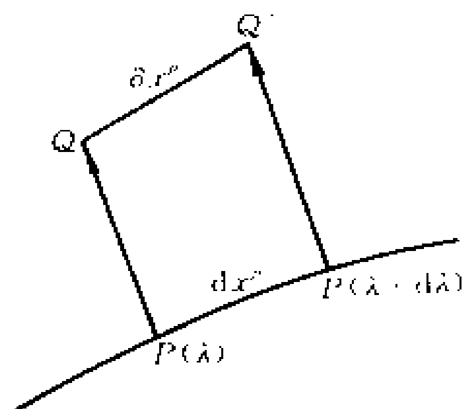


图 2.1　逆变矢量的映射

然后让我们考虑同一空间中的张量场在映射下的微商. 为了方便，把任意阶的张量场 $T^{\cdots}_{\cdots}(x)$ 简写作 $T(x)$. 设 P 和 Q 是映射的对应点(它们是邻近点). 与映射相联系的微商概念是要把 $T(P)$ 与 $T(Q)$ 作比较，可是它们是不同点上的张量，直接的相减将失去张量的性质. 为此必须引入映射下张量的移动(注意这是与以前讨论的平移完全不同的移动)，由它把 $T(P)$ 移至 Q 点成为 $T(P\Rightarrow Q)$，同样要求 $T(P\Rightarrow Q)$ 是 Q 点的张量. 这样才能定义张量场在映射意义下的微商，即李微商，

$$\mathfrak{L}_\xi T(x) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{T(Q) - T(P\Rightarrow Q)}{\varepsilon} \tag{2.7.3}$$

需要把 $T(P\Rightarrow Q)$ 的定义先确定下来. 显然,(2.7.3)式已表明,(p, q) 阶张量的李微商仍是 (p,q) 阶张量.

先看标量场 $\varphi(x)$. 我们定义

$$\varphi(P\Rightarrow Q) = \varphi(P). \tag{2.7.4}$$

这样就有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_\xi\varphi(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(Q) - \varphi(P\Rightarrow Q)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(Q) - \varphi(P)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_{,\mu} \mathrm{d}x^\mu/\varepsilon = \varphi_{,\mu}\xi^\mu.\end{aligned} \tag{2.7.5}$$

再看逆变矢量场 $k^\mu(x)$. 我们用直观的办法来引入 $k^\mu(P\Rightarrow Q)$. 过 P 点作一曲线 $x^\mu = x^\mu(\lambda)$,使它在 P 点的切矢量就是 $k^\mu(P)$. 即

$$k^\mu(P) = \left(\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda}\right)_P.$$

这样 $(\mathrm{d}x^\mu)_P$ 好像是"缩短了的" $k^\mu(P)$. 曲线上截取两点 P 和 P' (图 2.1),使 $\overline{PP'}^\mu = (\mathrm{d}x^\mu)_P$,即用它来代表 $k^\mu(P)$. 映射把 P(坐标为 x^μ)对应到 Q,

$$x^\mu_Q = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x).$$

映射把 P'(坐标为 $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$)对应到 Q',

$$x^\mu_{Q'} = x^\mu + \mathrm{d}x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x + \mathrm{d}x).$$

$\overline{QQ'}^\mu$ 作为 $\overline{PP'}^\mu$ 的映射,它就代表了 $k^\mu(P\Rightarrow Q)$.

$$\begin{aligned}\delta x^\mu \equiv \overline{QQ'}^\mu &= x^\mu + \mathrm{d}x^\mu + \varepsilon\xi^\mu(x + \mathrm{d}x) - x^\mu - \varepsilon\xi^\mu(x) \\ &= \mathrm{d}x^\mu + \varepsilon\xi^\mu_{,\nu}\mathrm{d}x^\nu + \text{二级以上小量}.\end{aligned} \tag{2.7.6}$$

$k^\mu(P\Rightarrow Q)$ 应是"放大了的" $\overline{QQ'}^\mu$,它被定义为

$$\begin{aligned}k^\mu(P\Rightarrow Q) &= \frac{\delta x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda} + \varepsilon\xi^\mu_{,\nu}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \\ &= k^\mu(P) + \varepsilon\xi^\mu_{,\nu}(P)k^\nu(P).\end{aligned} \tag{2.7.7}$$

当 $k^\mu(P\Rightarrow Q)$ 有了确切的含意,我们就可以算出 $k^\mu(x)$ 的李微商:

$$\mathfrak{L}_\xi k^\mu(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{k^\mu(Q) - k^\mu(P\Rightarrow Q)}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{k^\mu(Q) - k^\mu(P)}{\epsilon} - \xi^\mu_{,\nu}k^\nu$$

$$= k^\mu_{,\nu}\xi^\nu - \xi^\mu_{,\nu}k^\nu. \tag{2.7.8}$$

如果我们要求李微商也满足和普通微商一样的乘法规则，那就不必再讨论其他阶张量在映射下的移动而直接算出它们的李微商. 例如看协变矢量场 $p_\mu(x)$的李微商. $p_\mu(x)$与任一 $k^\mu(x)$可构成标量场 $p_\mu k^\mu$. 利用乘法规则，

$$\mathfrak{L}_\xi(p_\mu k^\mu) = (\mathfrak{L}_\xi p_\mu)k^\mu + p_\mu(\mathfrak{L}_\xi k^\mu). \tag{2.7.9}$$

由标量的李微商公式(2.7.5)，

$$\mathfrak{L}_\xi(p_\mu k^\mu) = (p_\mu k^\mu)_{,\sigma}\xi^\sigma = p_{\mu,\sigma}k^\mu\xi^\sigma + p_\mu k^\mu_{,\sigma}\xi^\sigma.$$

把它与 k^μ 的李微商公式(2.7.8)一并代入(2.7.9)，注意到 k^μ 是任意矢量场，我们得到

$$\mathfrak{L}_\xi p_\mu = p_{\mu,\sigma}\xi^\sigma + \xi^\sigma_{,\mu}p_\sigma. \tag{2.7.10}$$

这就是协变矢量场的李微商公式.

高阶张量场的李微商可以用类似的方法来做. 但我们不再推导，直接写出三个二阶张量的李微商公式：

$$\mathfrak{L}_\xi T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\rho}\xi^\rho + T_{\rho\nu}\xi^\rho_{,\mu} + T_{\mu\rho}\xi^\rho_{,\nu}, \tag{2.7.11}$$

$$\mathfrak{L}_\xi T^\mu_\nu = T^\mu_{\nu,\rho}\xi^\rho - T^\rho_\nu\xi^\mu_{,\rho} + T^\mu_\rho\xi^\rho_{,\nu}, \tag{2.7.12}$$

$$\mathfrak{L}_\xi T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{,\rho}\xi^\rho - T^{\rho\nu}\xi^\mu_{,\rho} - T^{\mu\rho}\xi^\nu_{,\rho}. \tag{2.7.13}$$

对李微商应注意两个特点. 首先，它不仅取决于被微商的张量场，还取决于映射的生成元. 其次，它不需要先有联络. 但是如果规定了联络，李微商也可用协变微商来表示. 容易验证，若把上面的张量场李微商公式右方的普通微商代换成协变微商，它们仍然是成立的，因为显含联络的项会自动抵消.

作为应用的例子，我们计算度规张量的李微商. 利用(2.7.11)，并把其中普通微商改为协变微商，得到：

$$\mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu;\rho}\xi^\rho + g_{\rho\nu}\xi^\rho_{;\mu} + g_{\mu\rho}\xi^\rho_{;\nu}.$$

考虑到 $g_{\mu\nu}$ 的协变微商是零，它化为

$$\mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\nu;\mu} + \xi_{\mu;\nu}. \tag{2.7.14}$$

§2.8 等度规映射和凯林(Killing)矢量场

P 和 Q 是一对相邻点，坐标差为 $\mathrm{d}x^\mu$，因此不变距离平方是

$$\mathrm{d}s_{PQ}^2 = g_{\mu\nu}(P)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu. \tag{2.8.1}$$

无穷小映射(2.7.2)把它们分别对应到 P' 和 Q'，设 P' 和 Q' 的坐标差为 δx^μ，则不变距离平方是

$$\mathrm{d}s_{P'Q'}^2 = g_{\mu\nu}(P')\delta x^\mu \delta^\nu x. \tag{2.8.2}$$

如果对任一对相邻点都有映射前后的不变距离相等的性质，即

$$\mathrm{d}s_{PQ}^2 = \mathrm{d}s_{P'Q'}^2, \tag{2.8.3}$$

那么这映射叫等度规映射. 等度规映射的生成元 $\xi^\mu(x)$ 就叫凯林矢量场. 那么，对确定的度规场，什么样的 $\xi^\mu(x)$ 才能生成等度规映射呢？

$\xi^\mu(x)$ 所应遵循的方程可直接导出. 因 P 与 P' 是映射的对应点，坐标差为 $\epsilon\xi^\mu$，所以

$$g_{\mu\nu}(P') = g_{\mu\nu}(P) + g_{\mu\nu,\lambda}(P)\epsilon\xi^\lambda. \tag{2.8.4}$$

再因 $P'Q'$ 是 PQ 的映射，由(2.7.6)知，

$$\delta x^\mu = \mathrm{d}x^\mu + \epsilon\xi^\mu_{,\lambda}\mathrm{d}x^\lambda. \tag{2.8.5}$$

把(2.8.4)与(2.8.5)式代入(2.8.2)，再让它与(2.8.1)式等起来，我们就得到

$$g_{\mu\nu,\lambda}\xi^\lambda + g_{\lambda\nu}\xi^\lambda_{,\mu} + g_{\mu\lambda}\xi^\lambda_{,\nu} = 0. \tag{2.8.6}$$

从(2.7.11)看出，(2.8.6)等价于

$$\mathfrak{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0. \tag{2.8.7}$$

再由(2.7.14)，它也可表述为

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0. \tag{2.8.8}$$

等价表述(2.8.6)—(2.8.8)式就是凯林矢量场所必须满足的微分

方程，它叫做凯林方程.

凯林方程也可用一个启示性的方法导出. 利用 ds^2_{PQ} 是标量，它在映射下移至对应点 P' 应保持不变. 这样

$$ds^2_{PQ} = (ds^2_{PQ})_{P\to P'} = (g_{\mu\nu}(P)dx^\mu dx^\nu)_{P\to P'}$$
$$= g_{\mu\nu}(P\Rightarrow P')(dx^\mu)_{P\to P'}(dx^\nu)_{P\to P'}.$$

注意到 dx^μ 映射到 P' 后就是 δx^μ，于是有

$$ds^2_{PQ} = g_{\mu\nu}(P\Rightarrow P')\delta x^\mu \delta x^\nu. \tag{2.8.9}$$

现在代替(2.8.1)，用(2.8.9)与(2.8.2)等起来，我们立即得到

$$g_{\mu\nu}(P\Rightarrow P') = g_{\mu\nu}(P'). \tag{2.8.10}$$

这式子说明了把满足(2.8.3)式的映射叫等度规映射的原因. 在数学形式上，把(2.8.10)与李微商的定义(2.7.3)对比，即可得出结论：在这种情况下度规张量的李微商为零，也就是(2.8.7)式.

凯林矢量场的概念的作用是刻画时空结构的几何对称性质. 当黎曼空间具有时间平移不变性，相应的凯林矢量场就是沿时间轴方向的平移矢量. 当黎曼空间在某方向上具有空间平移不变性，相应的凯林矢量场就是该方向的平移矢量. 当然凯林矢量场的概念也可以刻画空间的转动对称性和其它更复杂的对称性.

作为例子，我们讨论稳定的度规场. 首先应给出稳定的度规场的定义. 由于坐标的任意性，不可能有一度规场在任何坐标下都与时间变量无关. 所以我们这样下定义：若能选取适当的坐标(t,x,y,z)，使度规张量 $g_{\mu\nu}$ 与 t 无关，则这度规场就叫做稳定的度规场. 下面来证明，如果黎曼空间具有一个类时的凯林矢量场 $\xi^\mu(x)$，即

$$g_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu < 0, \tag{2.8.11}$$

则它的度规场必是稳定的.

设在某一组坐标下类时的凯林矢量场表达为 $\xi^\mu(x)$. 以 $\xi^\mu(x)$ 为切矢量作出一曲线族，即让任一点上曲线的切矢量$\frac{dx^\mu}{d\lambda}$与该点的 ξ^μ 平行. 然后建立新坐标$(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$，让上述曲线族作为$\tilde{x}^0$ 的坐标线族，即沿任一曲线移动时，$\tilde{x}^1$，$\tilde{x}^2$ 和$\tilde{x}^3$ 保持不变而只有$\tilde{x}^0$ 在

改变. 选取适当的曲线参量 λ,可以使新坐标下的类时凯林矢量场有形式

$$\xi^{\mu} = (1,0,0,0). \tag{2.8.12}$$

把新坐标下的度规张量记作$\tilde{g}_{\mu\nu}$,就有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_{\xi}\tilde{g}_{\mu\nu} &= \tilde{g}_{\mu\nu,\rho}\tilde{\xi}^{\rho} + \tilde{g}_{\rho\nu}\tilde{\xi}^{\rho}{}_{,\mu} + \tilde{g}_{\mu\rho}\tilde{\xi}^{\rho}{}_{,\nu} \\ &= \tilde{g}_{\mu\nu,0} = 0,\end{aligned} \tag{2.8.13}$$

即$\tilde{g}_{\mu\nu}$与$\tilde{x}^{0}$无关. 于是证明了这度规场的稳定性. 注意上述结论反过来也成立,即如果度规场是稳定的,它必具有类似的凯林矢量场,而且一定能找到适当的坐标使凯林矢量有(2.8.12)的简单形式. 这种讨论时间平移不变性的方法,事实上对讨论任何类型的时空对称性都是适用的. 我们在后面讨论物理问题时还将会遇到这种方法.

第三章　相对论性的引力理论

爱因斯坦所建立的广义相对论是一个协变的引力理论. 它包含两部分. 一部分是等效原理,它说明有引力场存在的时空构成弯曲的黎曼空间,空间度规起着引力势的作用. 另一部分是爱因斯坦引力场方程,它指明空间度规即引力势对物质分布的依赖关系. 本章讨论的就是这两部分内容.

§3.1　引力质量与惯性质量的等同性

牛顿在力学中引入过两个质量的概念. 一个从动力学方程

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{3.1.1}$$

引入,它反映物体的惯性,可叫作惯性质量. 另一个从引力定律

$$F = \frac{GMm}{r^2} \tag{3.1.2}$$

引入,它反映物体产生和接受引力的能力,可叫做引力质量. 从概念上讲,这两种质量是本质上不同的物理量. 但如果两者量值之比对一切物体相同,那么实用上就可以把它们当同一个量来对待. 这就叫惯性质量和引力质量的等同性.

由于从概念上没有说明它们会相等的理由,我们先退一步问:它们量值上的相等是不是一个确切的物理事实?

反映它们相等的第一个事实是伽利略的落体实验. 把重力作用下的落体方程写作

$$m_{惯}\, a = m_{引}\, g,$$

则有落体加速度

$$a = \frac{m_{引}}{m_{惯}} g. \tag{3.1.3}$$

从比萨斜塔上自由下落的大球和小球，铜球和铁球都同时到地，证明了引力质量和惯性质量之比与球的大小、材料都无关. 当然伽利略并没有这样想过.

第一个明确地想检验这等同性的是牛顿. 他做了两个等长的同形状的单摆，一个摆锤是金的，另一个摆锤选用等重的银、铅、玻璃、沙等不同的材料制成. 单摆的周期为

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{惯}\, l}{m_{引}\, g}}. \tag{3.1.4}$$

从这里看出，仅当引力质量与惯性质量之比与材料无关，两摆的周期才会相同. 牛顿做了许多实验都没能观测到周期的差异. 按照实验的精确度，牛顿的结论是

$$\frac{m_{引}}{m_{惯}} = 1 + O(10^{-3}).$$

此后检验这等同性的最著名的实验是厄阜(Eötvös)做的. 他用一个很精巧的扭摆装置，去测量上述比值对 1 的可能的偏离. 从 1890 年起他持续做了 25 年的实验，实验中他用铂为基准比较了八种不同材料，都没有发现这可能的偏离. 按照实验的精确度，厄阜的结论是

$$\frac{m_{引}}{m_{惯}} = 1 + O(10^{-8}).$$

在 60 年代，迪克(Dicke)等人改进了厄阜实验，但实验原理并没有改变. 他们仍观测到零结果，然而把精确度又提高为

$$\frac{m_{引}}{m_{惯}} = 1 + O(10^{-11}).$$

此外人们还用实验测定了原子和原子核的结合能所对应的惯性质量与相应引力质量之比. 虽然精确度还没有那么高，但也都没有发现对 1 的偏离.

总之，这些实验说明，在量值上

$$m_{引} = m_{惯} \quad (3.1.5)$$

是一个观测事实．而它们相等的原因，则有待理论去解释．

§3.2 等效原理

下面我们来讨论惯性质量与引力质量的等同性给人们的启示．

模仿爱因斯坦，考虑一个没有窗户的密封舱中的观察者．他不可能用直接的观察知道他的舱相对外部世界的运动．他通过舱内的实验发现了一条规律：舱内一切物体都会自由下落，下落的加速度与物体的固有属性无关．试想，他应该怎么解释这规律呢？

在牛顿力学的基础上，他发现有两种可能的解释．

首先，他会想到比萨斜塔上的伽利略实验，从而推断出他的舱是一个惯性系，舱内物体的自由下落是舱下面的恒星的重力场造成的．

其次，他也可以认为舱下面并没有恒星也没有引力场，舱内物体的加速自由下落反映他的舱在太空中加速地向上飞行，即下落是惯性力造成的．

注意重力正比于引力质量，而惯性力却正比于惯性质量．如果这两种质量是严格相等的，那么他在舱内再进一步做任何力学实验也不可能区分他的舱属于两种可能性中的哪一种．也就是说，他的任何力学实验都无法区分是重力的效果或惯性力的效果．这种引力和惯性力(即参考系的加速运动)的等效性被称作弱等效原理．其中“弱”指限于力学现象．弱等效原理只是惯性质量与引力质量严格相等的一个推论．

如果进一步假定任何物理实验——力学的、电磁的和其他的实验都不可能判断他的舱是引力场中的惯性系或不受引力的加速系，即不能区分引力或惯性力的效果，这就是强等效原理．强等效原理是一个更强的假设，也是更深刻的假设．它的要点是认为引力

和惯性力在物理效果上完全没有区别. 或者从另一角度讲: 一个局域参考系的加速度仅有相对的意义. 这正是广义相对论的基本观点.

如果参考系的加速度失去了绝对意义,那么惯性系的概念必须重新审查. 为此我们考察一个恒星表面附近正在自由下落的爱因斯坦密封舱.

以此密封舱为参考系,内部空间的引力与惯性力正好抵消. 舱内的观察者会发现,不需要引入任何看不到来源的力,牛顿第二定律对他的参考系完全适用. 任何力学实验都不能使他获得一点证据,来表明他的参考系在加速地相对恒星表面下落. 这一切正是弱等效原理的表现. 那么是否可能用其他的,例如电磁的实验来发现他的舱的加速运动呢?按强等效原理的思想,他的电磁实验将证实惯性系中才适用的麦克斯韦方程对他的舱完全有效,因而也没有理由断言他的舱在做加速运动.

按照这样的分析,近年来人们更准确地把强等效原理表述如下:在任何引力场中任一时空点,人们总能建立一个自由下落的局域参考系,在这一参考系中狭义相对论所确立的物理规律全部有效. 如果进一步把狭义相对论所确立的物理规律全部有效的参考系定义为惯性系,那么上述自由下落的密封舱正构成一个局域惯性系的样本. 值得注意,从恒星表面上的静止观察者看来,实际上,它是一个加速的参考系.

我们对这新的惯性系概念再作一些补充说明. 首先关于惯性系的本质. 原来认为惯性系是自身没有加速度的参考系. 这概念是无法确切定义的,因为在自然界中找不到第一个最基本的无加速系. 现在按推广了的引力概念,认为惯性系是没有引力存在的参考系. 或者用旧概念讲,它是引力与惯性力相抵消的参考系. 这样惯性系就成了至少局域地能实现的参考系,即在引力场中做自由运动的参考系. 按这新概念,一个静止在恒星表面的参考系反而不是惯性系了. 其次关于实际惯性系的局域性. 事实表明全空间的引力

场是不均匀的，因此无法找到一个参考系使它的惯性力处处与引力相消.这就说明现实的惯性系只能是局域的.严格讲来，在不均匀引力场中自由下落的参考系中，只有一点上的惯性力与引力完全相消.因此自由下落的局域惯性系也只是一个近似的惯性系.

§3.3 引力几何化

强等效原理是一个强有力的原理，它包含了许多重要的推论.上节讨论的惯性系概念的修正是它的推论之一.现在我们继续考察它的后果.

等效原理显然要求引力和惯性力可用同样方法描述.容易看清惯性力是怎么描述的.当一个质点相对闵柯夫斯基空间中的惯性系作自由运动时，它的动力学方程为

$$\frac{d^2X^\mu}{ds^2}=0, \tag{3.3.1}$$

其中 $X^\mu\equiv(T,X,Y,Z)$ 是惯性系的闵柯夫斯基坐标，从这里开始，我们将一直采用光速 $c=1$ 的自然单位制.方程(3.3.1)就是测地线方程.因为闵柯夫斯基度规下克里斯朵夫联络为零，测地线方程才简化成(3.3.1)的形式.我们可以用广义坐标变换来引入非惯性系，它的四维时空坐标记为 x^μ，

$$x^\mu=x^\mu(X).$$

相应的反变换为

$$X^\mu=X^\mu(x).$$

上述自由运动的动力学方程(3.3.1)可通过变换化成

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2}+\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}=0, \tag{3.3.2}$$

其中

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2X^\nu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\nu}. \tag{3.3.3}$$

(3.3.2)式就是非惯性系中的自由粒子的动力学方程.式中第一项是粒子的加速度,第二项是单位质量粒子所受的引力.从这里看出,惯性力场的场强是由黎曼空间的联络描述的.按照等效原理的思想,引力场与惯性力场在物理规律中的地位应是相同的,因此引力场强一般地应由空间的联络描述.我们从上一章知道,联络描述空间的几何结构,现在又看到引力场强也通过联络反映.这种用空间几何来表示引力的想法叫引力的几何化.

我们知道联络是由度规张量的微商构成的.因此,如果讲联络描述了引力场强,那么度规张量就相当于引力势.在牛顿理论中,引力势是一个标量场.按现在的理论,引力势是一个二阶对称张量场,它有10个独立的分量.

当肯定了引力场应由联络描述,它还将引伸出一个重要的推论.

如果时空是平坦的,那么总能找到一组闵柯夫斯基坐标使联络恒为零,即使引力场的效果完全消失.这意味着存在全局性的惯性系.然而经验却表明这种惯性系是不存在的.它推论,现实的物理时空一定是弯曲的黎曼空间.曲率张量必不为零,从而消除全部引力效果是不可能的.

黎曼几何又告诉我们,在弯曲空间中消除任一点的联络是永远可以的.这意味着在任一时空点的无穷邻域中引力效果是近似地可消除的,即近似的局域惯性系是永远可以找到的.这正是等效原理的物理基础.等效原理进一步作出了两个判断:(1)自由下落的局域参考系正是这种参考系;(2)在这种参考系中狭义相对论所肯定的物理规律都成立.这两点判断正是等效原理所蕴含的假设.

§3.4 弱引力场中的自由粒子

已经指出,任意引力场中自由粒子的动力学方程是测地线方程

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}. \tag{3.4.1}$$

现在我们论证，当满足条件：

(a) 引力场是弱场，即令

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.4.2}$$

则有

$$|h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{3.4.3}$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$是闵柯夫斯基度规(2.1.8)；

(b) 引力场是静态的，即

$$g_{\mu\nu,0} = h_{\mu\nu,0} = 0; \tag{3.4.4}$$

(c) 引力场是空间缓变的，即

$$g_{\mu\nu,i} = h_{\mu\nu,i} \ll 1, \tag{3.4.5}$$

此处及此后拉丁指标均为 1 至 3；

(d) 粒子的运动是低速的，即

$$\frac{dx^i}{dx^0} \ll 1; \tag{3.4.6}$$

那么测地线方程(3.4.1)将还原到牛顿方程

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \tag{3.4.7}$$

其中 $t \equiv x^0$，φ是牛顿引力势.

证明如下. 按上述条件 1 至 3，联络 $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$是小量. 保留至一级小量，有

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}(h_{\rho\alpha,\beta} + h_{\rho\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta,\rho}). \tag{3.4.8}$$

再利用条件 4，在(3.4.1)式右边也只保留一级小量，测地线方程简化为：

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} = 0, \tag{3.4.9}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma^i_{00}\left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2. \tag{3.4.10}$$

由(3.4.9)式解出

$$x^0 = \mathrm{i}s + \text{const.},$$

于是(3.4.10)式变成

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} = \frac{1}{2} h_{00,i}. \tag{3.4.11}$$

这正是牛顿方程(3.4.7)的形式. 对比看出牛顿引力势 φ 与度规分量 h_{00} 的关系为

$$\varphi = -\frac{1}{2} h_{00} + \text{const.}.$$

考虑到无穷远处引力场消失,度规还原到闵柯夫斯基形式,即 $\varphi=0$ 处有 $h_{00}=0$,则有

$$\varphi = -\frac{1}{2} h_{00}, \tag{3.4.12}$$

或写成

$$g_{00} = -1 + h_{00} = -1 - 2\varphi. \tag{3.4.13}$$

这证明告诉我们,引力场中的牛顿方程(3.4.7)仅对在静态的、缓变的弱引力场中的自由粒子才适用. 而我们又知道,这方程在天体力学中早已在很高的精度上被证实. 为看清这两方面没有矛盾,我们具体讨论一个质量为 M 的球状源的引力场.

按牛顿引力理论,球状源的外引力势为

$$\varphi = -\frac{GM}{r}, \tag{3.4.14}$$

其中 G 是牛顿引力常数. 当它是弱场时,上述证明说

$$g_{00} = -1 + \frac{2GM}{r}. \tag{3.4.15}$$

而弱场条件则表现为

$$\frac{2GM}{r} \ll 1. \tag{3.4.16}$$

定义 $R_g = 2GM$，叫球状源的引力半径①. 弱场条件就是

$$r \gg R_g, \tag{3.4.17}$$

即粒子在比引力半径大得多的地方运动. 我们来估算一下太阳的引力半径. 太阳质量 $M = 2 \times 10^{33}$ g. 从而算出它的引力半径

$$R_g = 3 \text{ km}.$$

注意到太阳物理半径是 7×10^5 km，看出即使对太阳表面附近运动的粒子，弱场条件(3.4.17)也是足够好地成立的. 反之，我们将看到要破坏弱场条件(3.4.17)则是很困难的.

由于牛顿外引力势公式(3.4.14)并不适用于引力源内部区域，所以要实现一个强场，源的几何半径至多略大于它的引力半径②. 设源的质量是一个太阳质量的量级，则这时源的物质密度须高达 2×10^{19} kg·m^{-3}. 实际上，太阳的平均密度是 10^3 kg·m^{-3} 的量级. 白矮星作为演化晚期的致密星，密度也只有 $10^9 \sim 10^{12}$ kg·m^{-3}. 在观测到的所有星体中，仅有中子星的密度达到了 10^{18} kg·m^{-3}. 因此中子星表面(其实也包括内部)的引力场是强场，它不宜用牛顿理论研究.

§3.5 爱因斯坦(Einstein)引力场方程

等效原理推广了引力的概念，并暗示了有引力场的时空是弯曲的黎曼空间，引力场的物理效果可通过黎曼空间的度规张量来体现. 为了完成这新的引力理论，需要找到度规场分布的物理规律，即度规场(或叫推广的引力势)所满足的微分方程. 可是这方面没有直接可依据的观测知识，所以能采取的途径是作猜测性的推理.

---

① 这是 $c=1$ 单位制中的定义式. 若采用普通的单位制，则有 $R_g = 2GM/c^2$，它有长度的量纲.

② 第七章中将看到，当几何半径小于或等于引力半径时，这源就不是普通的恒星，而是黑洞了.

参照牛顿引力理论，我们可以得到这些设想. 首先，牛顿引力势的分布取决于静态物质的密度分布，所以度规场应取决于物质的动量能量张量，因为在张量性的物理理论中物质密度是动量能量张量的一个分量. 这样我们把度规场方程的数学形式确立为

$$F_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \tag{3.5.1}$$

其中 $T_{\mu\nu}$是物质的动量能量张量，$F_{\mu\nu}$是由度规 $g_{\mu\nu}$及其微商构成的张量. 其次，牛顿引力方程

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho \tag{3.5.2}$$

是一个引力势的二阶线性偏微分方程，因此我们要求 $F_{\mu\nu}$最高只含 $g_{\mu\nu}$的二阶微商，且对二阶微商是线性的. 有趣的是黎曼几何中有一条定理①：由度规张量 $g_{\mu\nu}$及其一和二阶微商构成的，对二阶微商为线性的张量只有黎曼张量 $R^{\rho}_{\mu\nu\lambda}$及其缩并，此外就是 $g_{\mu\nu}$自身. 这一数学定理几乎把上述 $F_{\mu\nu}$完全确定了.

按上述推测和数学定理，$F_{\mu\nu}$最一般只能是

$$F_{\mu\nu} = \alpha R_{\mu\nu} + \beta g_{\mu\nu} R + \gamma g_{\mu\nu}, \tag{3.5.3}$$

其中 α，β 和 γ 是任意常参量. 注意到能量动量的守恒，它现在表现为 T^{μ}_{ν} 的四维协变散度等于零，即

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} = 0, \tag{3.5.4}$$

因此 $F_{\mu\nu}$应满足

$$F^{\mu}_{\nu;\mu} = 0.$$

参照公式(2.6.4)以及(2.3.8)，我们看出应取 $\beta = -\alpha/2$，即把 $R_{\mu\nu}$和 R 组合成爱因斯坦张量 $G_{\mu\nu}$. 这样度规场方程(3.5.1)就取得了具体形式

$$G_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}, \tag{3.5.5}$$

其中 κ 叫相对论引力常数，下一节将导出它与牛顿引力常数 G 的关系；λ 是唯一剩下的任意参量. 最简单的可能是令 $\lambda = 0$，相应的方程

---

① 这定理的证明可参看，例如温伯格著的《引力论和宇宙论》第六章第二节.

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - \kappa T_{\mu\nu} \tag{3.5.6}$$

叫爱因斯坦引力场方程.

将方程(3.5.6)的指标上升再缩并,得到

$$R = \kappa T, \tag{3.5.7}$$

其中 $T \equiv T^{\mu}_{\mu}$ 是动量能量张量的迹. 把它代入式(3.5.6)再移项,爱因斯坦场方程获得另一等价的表述

$$R_{\mu\nu} = - \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \tag{3.5.8}$$

当 $T_{\mu\nu} = 0$,即处理物质分布区之外的引力场,我们有

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{3.5.9}$$

这是真空区的场方程.

§3.6 场方程的牛顿近似

现在我们讨论什么条件下爱因斯坦引力场方程将还原到牛顿引力场方程. 为与前节的分析相协调,自然期望相应的条件正是前节的条件 1 至 3. 我们来导出这些条件下的爱因斯坦场方程的简化形式.

考虑一片非相对论性理想流体构成的介质[①],它在某参考系中为静止介质. 由狭义相对论知,非相对论理想流体的动量能量张量为

$$T^{\mu\nu} = \rho u^{\mu} u^{\nu}, \tag{3.6.1}$$

其中 ρ 是物质密度,u^{μ} 为介质的四维速度,它定义为

$$u^{\mu} \equiv \frac{\mathrm{d}x^{\mu}}{\mathrm{d}\tau}, \tag{3.6.2}$$

而 $\mathrm{d}\tau$ 是固有时,

---

① 这里非相对论指的是构成流体的微粒的热速度远小于光速,从而有压力 $p \ll \rho$. 接着讲的静止,指介质各点的宏观速度为零.

$$d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{3.6.3}$$

这样 u^μ 归一为

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1. \tag{3.6.4}$$

采用相对介质静止的坐标系，u^μ 有形式

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}(1,0,0,0), \tag{3.6.5}$$

于是看出，动量能量张量的唯一非零分量是

$$T^{00} = -\rho/g_{00}. \tag{3.6.6}$$

相应张量的迹为

$$T = T^\mu_\mu = -\rho. \tag{3.6.7}$$

然后计算静态、缓变弱场近似下的里契张量 $R_{\mu\nu}$. 写出

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\lambda\rho}. \tag{3.6.8}$$

保留至一级小量，联络 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ 为

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(h_{\rho\mu,\nu} + h_{\rho\nu,\mu} - h_{\mu\nu,\rho}). \tag{3.6.9}$$

它的分量可明显地写成

$$\Gamma^0_{00} = 0,$$

$$\Gamma^0_{0i} = -\frac{1}{2}h_{00,i},$$

$$\Gamma^0_{ij} = -\frac{1}{2}(h_{0i,j} + h_{0j,i}),$$

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}h_{00,i},$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2}(h_{0i,j} - h_{0j,i}),$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}(h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i}).$$

因联络分量是一级小量，里契张量(3.6.8)式右边对联络为二次的项可以忽略，即

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda}. \tag{3.6.10}$$

于是得出所述条件下里契张量分量的简化形式

$$R_{00}=\frac{1}{2}h_{00,i,i},$$

$$R_{0i}=\frac{1}{2}(h_{k0,i,k}-h_{0i,k,k}),$$

$$R_{ij}=\frac{1}{2}(h_{kk,i,j}-h_{ki,j,k}-h_{kj,i,k}+h_{ij,k,k}).$$

虽然这是非协变形式，我们仍保持重复指标自动求和的约定.

用定义把里契张量换成逆变形式，

$$R^{\mu\nu}\equiv g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}R_{\alpha\beta}=\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}R_{\alpha\beta}. \tag{3.6.11}$$

于是看出，在一级近似下有

$$R^{00}=R_{00},\quad R^{0i}=-R_{0i},\quad R^{ij}=R_{ij}.$$

为导出牛顿近似下的场方程，现在一切都准备好了. 我们写出 00 分量的方程

$$R^{00}=-\kappa\left(T^{00}-\frac{1}{2}g^{00}T\right).$$

把有关的量代入，得到

$$h_{00,i,i}=-\kappa\rho. \tag{3.6.12}$$

利用前节得出的关系，牛顿引力势

$$\varphi=-\frac{1}{2}h_{00}. \tag{3.4.12}$$

这样(3.6.12)可改写成牛顿势 φ 的微分方程，

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{2}\kappa\rho. \tag{3.6.13}$$

它完全就是牛顿引力理论中的场方程(3.5.2). 对比之下定出[①]

$$\kappa=8\pi G. \tag{3.6.14}$$

至此我们既论证了在适当条件下爱因斯坦场方程以牛顿场方程为近似，而且把场方程(3.5.6)中唯一的参量用实验值确定了.

---

① 在普通单位制下有 $\kappa=8\pi G/c^4$，c 是光速.

最后对方程(3.5.5)作一些说明. 前已指出,引力场方程中可以添一个 $\lambda g_{\mu\nu}$ 形式的项. 在牛顿近似下,它将给(3.6.13)式右方加上常数 λ,因此参量 λ 必须充分小才能保证牛顿引力理论是足够好的近似. 爱因斯坦曾设想,这一项应很小,以至对通常天文尺度上的引力场不起重要作用;而只在宇宙学问题上才有重要作用. 这一项因此得名为宇宙项. 爱因斯坦最初利用宇宙项建立了一个稳态的宇宙模型. 现在观测表明,宇宙并不是稳态的,因此宇宙学是否必须要这样的项也是一个争论中的问题.

§3.7 谐和坐标条件

度规张量作为对称张量,它有 10 个独立分量. 爱因斯坦引力场方程

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

初看也是 10 个方程,其实不是. 由于毕安基恒等式 $G^{\mu}_{\nu;\mu}=0$,场方程只有 6 个是独立的. 这样场方程并不能完全确定 $g_{\mu\nu}$ 的 10 个分量. $g_{\mu\nu}$ 有 4 个不能为场方程确定的自由度反映一个事实,若 $g_{\mu\nu}$ 是场方程的解,那么作任意变换 $x\to x'$ 后的 $g'_{\mu\nu}$ 也是场方程的解,它们所代表的物理情况是一样的. 因此,这种不确定性使我们可以对坐标的选择加上 4 个限制条件.

有一种常被采用的限制条件叫谐和坐标条件,它要求坐标的选择满足

$$\Gamma^{\lambda} \equiv g^{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0, \tag{3.7.1}$$

或利用联络的定义,把上述条件写作

$$g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}) = 0. \tag{3.7.2}$$

满足(3.7.1)或(3.7.2)的坐标叫谐和坐标. 注意这条件既然是对坐标选择的限制,它当然不是协变的.

谐和的含意是什么? 若 ϕ 是谐和量意指它满足谐和方程

$$\Box\phi \equiv (g^{\lambda\rho}\phi_{;\lambda})_{;\rho} = 0. \tag{3.7.3}$$

可以证明[1]

$$\Box\phi = g^{\lambda\rho}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^\lambda\partial x^\rho} - \Gamma^\lambda\frac{\partial\phi}{\partial x^\lambda}. \tag{3.7.4}$$

取 ϕ 为坐标 x^μ，因为

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^\lambda\partial x^\rho} = 0,$$

便有

$$\Box x^\mu = -\Gamma^\lambda\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\lambda} = -\Gamma^\mu. \tag{3.7.5}$$

这样，若坐标的选取满足 $\Gamma^\mu=0$，我们有

$$\Box x^\mu = 0. \tag{3.7.6}$$

这就是谐和坐标名称的来源.

在没有引力场的情况下采用笛卡儿坐标，使度规具有闵柯夫斯基的形式

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu},$$

易从(3.7.2)验证它满足谐和坐标条件. 因此，谐和坐标可以看作闵柯夫斯基空间中的笛卡儿坐标在有引力场情况下的推广.

在讨论弱引力场下的线性近似理论时用谐和坐标尤为方便. 在弱引力场下，我们把度规表示成

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.4.2}$$

并有 $|h_{\mu\nu}|\ll 1$. 线性近似理论中只保留 $h_{\mu\nu}$ 的线性项，于是有

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \\ &\equiv \frac{1}{2}(h^\mu_{\alpha,\beta} + h^\mu_{\beta,\alpha} - h_{\alpha\beta}^{\ \ ,\mu}).\end{aligned} \tag{3.7.7}$$

注意线性理论中张量指标的升降是借助 $\eta^{\mu\nu}$ 和 $\eta_{\mu\nu}$ 进行的. 线性化后的里契张量也很简单.

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu,\lambda}$$

---

[1] 参看例如温伯格著的《引力论和宇宙论》第七章第四节.

$$=\frac{1}{2}(h_{\mu\nu,\alpha}^{;\alpha}+h_{,\mu,\nu}-h_{\mu,\nu,\alpha}^{\alpha}-h_{\nu,\mu,\alpha}^{\alpha}), \tag{3.7.8}$$

其中

$$h\equiv h_{\alpha}^{\alpha}=\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}. \tag{3.7.9}$$

为表达引力场方程的方便，我们定义

$$\bar{h}_{\mu\nu}\equiv h_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \tag{3.7.10}$$

容易证明，它的逆变换是

$$\bar{\bar{h}}_{\mu\nu}\equiv\bar{h}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}=h_{\mu\nu}. \tag{3.7.11}$$

利用$\bar{h}_{\mu\nu}$，线性化的场方程

$$\bar{R}_{\mu\nu}\equiv R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R=-8\pi GT_{\mu\nu}, \tag{3.7.12}$$

具体化为

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^{;\alpha}+\eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}^{;\alpha,\beta}-\bar{h}_{\mu\alpha,\nu}^{;\alpha}-\bar{h}_{\nu\alpha,\mu}^{;\alpha}=-16\pi GT_{\mu\nu}. \tag{3.7.13}$$

如果对坐标加上谐和条件的限制，线性化场方程(3.7.13)将简化. 谐和条件(3.7.2)线性化后有形式

$$\bar{h}_{\mu\alpha}^{;\alpha}=0. \tag{3.7.14}$$

这样(3.7.13)式左边后三项全为零. 于是场方程化简为

$$\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}^{;\alpha}=16\pi GT_{\mu\nu}. \tag{3.7.15}$$

(3.7.14)和(3.7.15)就是谐和坐标下的线性化引力场方程，它非常类似于电磁学中电磁势的场方程和洛伦兹规范条件. 因此(3.7.14)也叫引力势的洛伦兹规范条件.

如同电磁势的洛伦兹规范并没有完全确定电磁势一样，现在引力势的洛伦兹规范也没有完全确定坐标. 如果再作坐标变换

$$x^{\mu}\rightarrow x^{\mu}+\xi^{\mu}, \tag{3.7.16}$$

其中 ξ^{μ} 是 $h_{\mu\nu}$的同级小量，那么

$$h_{\mu\nu}\rightarrow h_{\mu\nu}-\xi_{\mu,\nu}-\xi_{\nu,\mu}. \tag{3.7.17}$$

容易验证，只要 ξ^{μ} 满足

$$\xi_{\mu,\alpha}^{;\alpha}=0, \tag{3.7.18}$$

则变换(3.7.16)将不破坏 $h_{\mu\nu}$ 的洛伦兹规范性.

最后应注意,在一组确定的坐标下解出 $\bar{h}_{\mu\nu}$ 后,度规场是

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}. \tag{3.7.19}$$

§3.8 引 力 波

在形式上,$\bar{h}_{\mu\nu}$ 所满足的场方程(3.7.15)就是闵柯夫斯基空间中的波动方程. 这表明引力场和电磁场一样可以用波的方式辐射和传播,而且引力波的波速就是光速 c.

我们只讨论引力波的传播. 当波在真空中传播时,有 $T_{\mu\nu}=0$,因而可用 $R_{\mu\nu}=0$ 代替(3.7.12)式. 波方程(3.7.15)相应改作

$$h_{\mu\nu,\alpha}^{;\alpha} = 0, \tag{3.8.1}$$

洛伦兹规范条件写作

$$h_{\mu\alpha}^{;\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\alpha}h^{;\alpha} = 0. \tag{3.8.2}$$

看沿 x 方向传播的单色平面波

$$h_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}e^{i(kx-\omega t)}, \tag{3.8.3}$$

波方程(3.8.1)决定 $k=\omega$. 洛伦兹规范条件要求振幅满足

$$\bar{A}_{\mu}^{1} = \bar{A}_{\mu}^{0}, \tag{3.8.4}$$

其中

$$\bar{A}_{\mu}^{\nu} \equiv A_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\nu}A_{\alpha}^{\alpha}.$$

此外,我们用显然满足式(3.7.18)的函数

$$\xi_{\mu} = \xi_{\mu}^{(0)}e^{i(kx-\omega t)} \tag{3.8.5}$$

按(3.7.16)和(3.7.17)式作规范变换. 适当选取 $\xi_{\mu}^{(0)}$ 可以使

$$\bar{A}_{1}^{0} = \bar{A}_{2}^{0} = \bar{A}_{3}^{0} = 0, \tag{3.8.6}$$

$$\bar{A}_{2}^{2} + \bar{A}_{3}^{3} = 0. \tag{3.8.7}$$

条件(3.8.4)和(3.8.6)使 $\mu=0,1$ 或 $\nu=0,1$ 的振幅 $\bar{A}_{\mu\nu}$ 都等于零

即振幅只有 2,3 分量不为零. 注意这波是沿 $x^1=x$ 的方向传播的,因此所用的规范叫横波规范. 余下不为零的振幅是

$$\begin{pmatrix} \overline{A}_2^2 & \overline{A}_2^3 \\ \overline{A}_3^2 & \overline{A}_3^3 \end{pmatrix}.$$

它是对称的,又是无迹的(由于式(3.8.7)),因此只有两个独立的分量. 由于 $\overline{A}_\alpha^\alpha=0$,所以

$$A_{\mu\nu} = \overline{A}_{\mu\nu}.$$

由此得出结论,沿 x 方向传播的平面引力波(3.8.3)的振幅 $A_{\mu\nu}$ 在横向无迹的洛伦兹规范下只有两个独立分量,它可取为 A_{23} 和 $A_{22}-A_{33}$.

第四章　观测量的理论

在广义相对论中，我们需要一个理论，用它来说明某一观测者在他的局域参考系中所测到的物理量与张量性物理理论中所得出的物理量之间的关系，这就是观测量的理论．这理论一般是很复杂的，但对于局域的观测，它的含义却是简单明确的．本章要讨论的将限于局域的观测量理论．

§4.1　观测量作为标量

按广义相对论，四维物理时空是一个弯曲的黎曼空间．因此一般讲，全局性的空间刚架和全局性的统一时间都是不存在的．选定时空坐标系的作用仅是对事件的时空位置提供一种确定的表述，它完全不具有一个全局性参考系的含意．后面我们将看到，即使在局域的意义上，坐标系也不一定能代表一个物理上有意义的参考系．可是从另一方面讲，物理量必须具有可观测性，而任何测量总是与一个确定的观测者的局域参考系相联系的．脱离参考系来谈论测量结果是没有意义的．广义相对论对物理问题的理论研究需要坐标系，任何测量结果都依赖于参考系，但坐标系与参考系一般又并不一致，这三个情况结合在一起就导致了一个问题：在某一坐标系中所得出的张量性的物理量与某一观测者观察同一现象时所测到的物理量之间是什么关系？

在讨论这问题之前，我们先对坐标系和参考系的概念作一澄清．什么是时空坐标系？时空坐标系就是在物理事件的时空位置和四个数构成的数组之间建立一种确定的一一对应关系．有了时空坐标系，这数组的任一确定取值就代表了一个确定的时空点．

什么是参考系？由于全局性参考系一般没有意义，我们限于用局域参考系的概念．简单说，一个局域参考系就是指一个按确定方式在时空中运动的观测者所携带的局域刚架和时钟．

在测量问题中我们面对着四个因素：第一是确定的观察对象．这里指的是某物理现象中的某个物理量．第二是事件发生点的时空几何性质．第三是确定的参考系．主要是指按某种已知方式运动的观测者．第四是一个为表述该物理量和该观测者运动情况的坐标系．任一观测结果会依赖于前三个因素，即依赖于观测对象、观测者和观测点的时空几何，这是显然的．需要强调的是观测结果不应依赖于第四个因素，即它应与坐标系无关．例如看两个事件的时间间隔的测量．当前三个因素都已确定时，该观测者就可测得一个确定的数．坐标系的选取虽具有人为的任意性，但当客观情况一经确定，换一种坐标取法将不再改变这个数的大小．这一结论用张量的术语讲，那就是观测量必定是一个标量．后面的实例将帮助我们理解这一点．

§4.2 时空间隔的测量和投影算符

我们讨论在具有确定的几何结构(即度规张量)的时空中的两个事件 P 和 Q. 任意选定坐标系后，事件 P 的时空坐标为 x^μ，Q 的时空坐标为 $x^\mu+dx^\mu$. 我们想知道这两个事件间的时间间隔和空间距离的大小．

从狭义相对论知道，这问题的提法不完整，因为两事件间的时间间隔及空间距离与观测者的运动情况有关．为此我们先给出观测者的运动情况的描述．

在上述同一坐标系中，观测者的运动由他的四维世界线

$$x^\mu_{观} = x^\mu_{观}(\tau) \tag{4.2.1}$$

来刻画．世界线的切矢量即他的四维速度

$$u^\mu = \frac{dx^\mu_{观}}{d\tau}. \tag{4.2.2}$$

这四维速度 u^μ 是类时矢量，它归一为

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1. \tag{4.2.3}$$

现在我们才可以问：对这一观测者讲，他测到 P 和 Q 的时间间隔 ΔT 和空间距离 ΔL 有多大？

任一观测者都有权认为自己是静止的，因此他可以把他的世界线的切向当作他的时间轴方向．与时间轴正交的三维子空间就是他的普通空间．被观测事件 P 与 Q 的时空坐标差 dx^μ 是一个四维矢量．若把这四维矢量往观测者的时间轴上投影，所得到的就是他应测得的 P 与 Q 的时间间隔．同样，若把这四维矢量往观测者的空间部分投影，所得的矢量的长度就是他应测得的 P 与 Q 的空间距离．这就是我们关于时空测量的基本观念．问题在于如何引入时间方向和空间部分的投影运算．

我们把时间投影算符定义为

$$\pi^{\mu\nu} \equiv -u^\mu u^\nu, \tag{4.2.4}$$

其中 u^μ 是观测者的四维速度．相应显然可以有混合的和协变的算符 π^μ_ν 及 $\pi_{\mu\nu}$. 任一逆变矢量 A^μ 在时间轴上的投影定义为

$$A^\mu_{/\!/} \equiv \pi^\mu_\nu A^\nu. \tag{4.2.5}$$

注意，按这样的定义，投影后的 $A^\mu_{/\!/}$ 仍是原空间的四维逆变矢量．

这样定义的 $\pi^{\mu\nu}$ 叫作时间投影算符，因为它具有如下两点性质：

(a)对任一 A^μ，投影后的 $A^\mu_{/\!/}$ 必平行于时间轴方向 u^μ.

证明：由于

$$A^\mu_{/\!/} = \pi^\mu_\nu A^\nu = -u^\mu u_\nu A^\nu = -(u_\nu A^\nu)u^\mu, \tag{4.2.6}$$

因此它与 u^μ 是平行的．

(b)若 A^μ 平行于 u^μ，则 $A^\mu_{/\!/}$ 就是 A^μ 自身．

证明：当 A^μ 与 u^μ 平行，可令 $A^\mu = Cu^\mu$. 这样

$$A^\mu_{/\!/} = -(u_\nu A^\nu)u^\mu = -C(u_\nu u^\nu)u^\mu = Cu^\mu = A^\mu. \tag{4.2.7}$$

由这两个性质导出一自然的结果

$$\pi^{\mu}_{\nu}\pi^{\nu}_{\lambda} = \pi^{\mu}_{\lambda}, \tag{4.2.8}$$

即投影后再投影等于一次投影．

有了时间投影算符，我们只要把两事件的时空间隔矢量 dx^{ν} 往时间轴上投影，就可以得出该观测者应测得的 ΔT 了．投影后有

$$dx^{\mu}_{//} = \pi^{\mu}_{\nu}dx^{\nu}. \tag{4.2.9}$$

因它仍是矢量，求它的长度①，即得 ΔT.

$$\begin{aligned}\Delta T &= \sqrt{-g_{\mu\nu}dx^{\mu}_{//}dx^{\nu}_{//}} = \sqrt{-g_{\mu\nu}\pi^{\mu}_{\alpha}\pi^{\nu}_{\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}} \\ &= \sqrt{-\pi_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}} \\ &= -u_{\alpha}dx^{\alpha} = -g_{\alpha\beta}u^{\alpha}dx^{\beta}.\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

从这结果看出 ΔT 确实是一个标量，亦即与坐标系的选择无关．在不同坐标系下，描述时空几何的 $g_{\alpha\beta}$、描述观测者运动的 u^{α} 及描述事件间隔的 dx^{β} 都将不同，但 ΔT 是一样的．而这正是观测量的客观性所要求的．

下面看两个例子：

例 1 平坦时空中的静观测者的测量．当用闵柯夫斯基坐标，有

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad u^{\mu} = (1,0,0,0).$$

由(4.2.10)立即得出

$$\Delta T = dx^{0}.$$

这正是一个最平常的结果．

例 2 平坦时空中沿 x 方向运动的观测者的测量．这时有

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad u^{\mu} = (u^{0},u^{1},0,0).$$

由 u^{μ} 的归一化条件(4.2.3)得出

---

① $dx^{\mu}_{//}$ 是类时矢量，它的长度平方 $g_{\mu\nu}dx^{\mu}_{//}dx^{\nu}_{//}<0$.

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad u^1 \frac{v}{\sqrt{1-v^2}},$$

其中 $v=\frac{\mathrm{d}x^1_{观}}{\mathrm{d}x^0_{观}}$是观测者的速度．代入(4.2.10)式即得

$$\Delta T = \frac{\mathrm{d}x^0 - v\mathrm{d}x^1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

这正是洛伦兹变换公式之一．

然后我们转入空间距离的测量问题，为此引入空间投影算符

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu. \tag{4.2.11}$$

任一逆变矢量 A^μ 在普通空间部分的投影定义为

$$A^\mu_\perp = h^\mu_\nu A^\nu. \tag{4.2.12}$$

这投影运算具有如下性质：

(a)对任意 A^μ，投影后的 $A^\mu_\perp$ 必与时间轴方向 u^μ 垂直，即 $A^\mu_\perp u_\mu = 0$；

(b)若 A^μ 与 u^μ 垂直，则投影后的 $A^\mu_\perp$ 等于自身；

(c)若 A^μ 与 u^μ 平行，则投影后为零；

(d)时间投影部分和空间投影部分之和为自身，即

$$A^\mu_{/\!/} + A^\mu_\perp = A^\mu; \tag{4.2.13}$$

(e) $h^\mu_\nu h^\nu_\lambda = h^\mu_\lambda$； (4.2.14)

(f) $h^\mu_\nu \pi^\nu_\lambda = \pi^\mu_\nu h^\nu_\lambda = 0.$ (4.2.15)

所有这些性质都很容易从定义直接验证．

计算时空坐标差为 $\mathrm{d}x^\mu$ 的两事件的空间距离就是把它向空间方向投影，然后求 $\mathrm{d}x^\mu_\perp$ 的长度．

$$\Delta L = \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu_\perp \mathrm{d}x^\nu_\perp} = \sqrt{g_{\mu\nu}h^\mu_\alpha h^\nu_\beta \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta}$$
$$= \sqrt{h_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta}. \tag{4.2.16}$$

从这结果又一次看出，ΔL 取决于事件的坐标差 $\mathrm{d}x^\mu$、观测者的四维速度 u^μ 和该点的度规 $g_{\mu\nu}$；ΔL 是一个标量，它与坐标系无关．从公式(4.2.16)还看到，在三维普通空间中起度规作用的是 $h_{\mu\nu}$而

不是$g_{\mu\nu}$的空-空分量.

下面看两个空间测量的例子:

例 1 平坦时空中的静观测者的测量. 当用闵柯夫斯基坐标,有

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad u^{\mu} = (1,0,0,0).$$

由 $h_{\mu\nu}$的定义(4.2.11)算出

$$h_{ij} = \eta_{ij}, \quad h_{00} = h_{0i} = h_{i0} = 0.$$

然后(4.2.16)式给出

$$\Delta L = \sqrt{\eta_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j},$$

这正是欧氏几何中最熟知的结果.

例 2 平坦时空中沿 x 方向运动的观测者的测量. 这情况下可有

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu},$$

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad 或 \quad u_0 = \frac{-1}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$u^1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}} \quad 或 \quad u_1 = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}.$$

由 $h_{\mu\nu}$的定义算出

$$h_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \frac{v^2}{1-v^2} & \frac{-v}{1-v^2} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{1-v^2} & \frac{1}{1-v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

代入(4.2.16)式,我们即有

$$\Delta L^2 = \frac{(\mathrm{d}x^1 - v\mathrm{d}x^0)^2}{1-v^2} + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2.$$

这正是洛伦兹变换给出的结果.

最后指出,由(4.2.10)式和(4.2.16)式可得出一个值得注意

的结果：

$$-\Delta T^2+\Delta L^2=-u_\alpha u_\beta \mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta+(g_{\alpha\beta}+u_\alpha u_\beta)\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta$$
$$=g_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta=\Delta s^2.$$

这结果与平坦时空下的结果一样，可是它却对任意引力场中的任意观测者都适用．

§4.3 物理的坐标系

在任意的物理时空中取定了坐标系 x^μ 之后，我们来考虑一种特殊的观测者，它的四维速度是

$$u^0\neq 0;\quad u^i=0. \tag{4.3.1}$$

这种观测者相对于坐标系是局域静止的，也可以说它相对于坐标系是局域地随动的．由 u^μ 的归一条件(4.2.3)定出

$$u^0=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}. \tag{4.3.2}$$

先以这观测者所携带的时钟的走时为观测对象．这时有 $\mathrm{d}x^i=0$ 和 $\mathrm{d}x^0\neq 0$. 结合他自身的四维速度表达式(4.3.1)和(4.3.2)，他测得的时间间隔立即由(4.2.10)给出

$$\Delta T=-g_{00}u^0\mathrm{d}x^0=\sqrt{-g_{00}}\mathrm{d}x^0. \tag{4.3.3}$$

这结果其实就是(4.3.2)式．从这结果看到，如果要求观测者相对坐标系局域静止，则该处的 g_{00} 必须小于零；这时 $\sqrt{-g_{00}}$ 是时钟指示的时间差与时间坐标差之间的比例因子．

再看这观测者在自身邻域的空间距离测量．算出他所适用的普通空间度规为

$$h_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}+u_\alpha u_\beta=g_{\alpha\beta}+g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}u^\mu u^\nu$$
$$=g_{\alpha\beta}-(g_{\alpha0}g_{\beta0})/g_{00}. \tag{4.3.4}$$

它表明 $h_{00}=h_{0i}=h_{i0}=0$，其空-空分量

$$h_{ij} = g_{ij} - (g_{i0}g_{j0})/g_{00}. \tag{4.3.5}$$

如果时空度规有性质 $g_{i0}=0$，则 $h_{ij}=g_{ij}$. 一般说，从这种局域静止观测者看来，相邻点的距离公式为

$$\Delta L = \sqrt{h_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha\mathrm{d}x^\beta} = \sqrt{h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}. \tag{4.3.6}$$

距离公式(4.3.6)也可以用一个物理上更直观的方法来导出．为测量邻点 P 与 Q 的空间距离，P 点的静观测者送出一光信号，信号从 P 传至 Q 再返回 P 所化的时间的一半乘上光速应该就是 P 与 Q 的空间距离．我们按这样的理解来导出距离公式．

先算信号从 P 至 Q 的传播．设 P 与 Q 的空间坐标差为 $\mathrm{d}x^i$，传播的时间坐标差为 $\mathrm{d}x^0_{去}$．因光的传播满足 $\mathrm{d}s^2=0$，所以有

$$g_{00}(dx^0_{去})^2 + 2g_{0i}\mathrm{d}x^0_{去}\,\mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j = 0.$$

解出

$$\mathrm{d}x^0_{去} = \frac{1}{-g_{00}}\left(g_{0i}\mathrm{d}x^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right).$$

再同样算信号从 Q 至 P 的返回．这时空间坐标差应为 $-\mathrm{d}x^i$，传播的时间坐标差为 $\mathrm{d}x^0_{回}$．相应解出的结果是

$$\mathrm{d}x^0_{回} = \frac{1}{-g_{00}}\left(-g_{0i}\mathrm{d}x^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{00}g_{ij})\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}\right).$$

信号从 P 传出再返回 P 所化的时间是

$$\Delta T = \sqrt{-g_{00}}(\mathrm{d}x^0_{去} + \mathrm{d}x^0_{回}).$$

注意在我们的单位制中光速 $c=1$，所以 ΔL 就是 $\Delta T/2$. 最后得到的距离公式是

$$\Delta L = \sqrt{\left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j}.$$

它与用投影运算得出的(4.3.6)式是完全一样的．

我们强调指出，距离公式(4.3.6)的得出是以存在局域静止观测者为前提的．如果这前提在物理上能实现，那么他测得的 ΔL 应总是实数．这也就是要求 $h_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j$ 是一个正定的二次型．把对

h_{ij}的要求转化为对时空度规 $g_{\mu\nu}$的要求，它可表述为

$$g_{00} < 0, \tag{4.3.7}$$

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} < 0, \tag{4.3.8}$$

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} < 0, \tag{4.3.9}$$

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0. \tag{4.3.10}$$

这些条件叫物理的坐标系条件．反之，若这些条件之一不成立，则所用的坐标系是非物理的，意指一个物理的观测者不可能相对这坐标系局域静止．这正是在§4.1 中指出的，即使局域地看，坐标系也不一定能代表一个物理上有意义的参考系．可是注意，这样的坐标系在广义相对论中是允许采用的．

最后说明两点弯曲时空与平坦时空的差别．

(a)时间对准问题．两相邻点 P 与 Q 的时间对准可通过光信号的传播来做到．上面算出 $\mathrm{d}x^0_{去} \neq \mathrm{d}x^0_{回}$ 说明 P 与 Q 的时间一般没有对准．以 P 为基准，Q 点所需的修正量是

$$\Delta x^0 = \frac{\mathrm{d}x^0_{去} - \mathrm{d}x^0_{回}}{2} = -\frac{g_{0i}\mathrm{d}x^i}{g_{00}}. \tag{4.3.11}$$

如果想用逐点调准的方法来对准有限远处的时间，那必须要求(4.3.11)式的积分与空间路径无关．对于弯曲时空，这一般是不成立的．因此在广义相对论中通常不能建立全局性的统一时间．从(4.3.11)式又看出，如果度规有性质 $g_{0i}=0$，那么坐标时不仅可以对准而且已经对准了．

(b)有限距离问题．静止观测者测得的相邻点间的空间距离 ΔL 也叫两点间的固有距离．如果要对有限间隔的两点间的三维

曲线定义固有距离，那就要涉及对 ΔL 的表达式(4.3.6)的积分．可是由于度规 $g_{\mu\nu}$ 一般依赖于 x^0，为积分就失去了确切的意义．因此在广义相对论中，空间距离的概念对相邻点有确切的定义，对有限间距点通常没有确切的定义．有一类重要特例，即 $g_{\mu\nu}$ 与 x^0 无关，这时有限曲线的长度可由积分得到确定值．

§4.4　四轴系和局域测量的一般概念

前面我们以观测者的世界线的切向为基准来建立他的参考系，这样自然地把他的四维时空分隔成了相互正交的两部分，平行于世界线切向的一维叫他的时间，垂直于这方向的三维叫他的空间．现在我们再在他的三维空间中引入三个两个正交的类空轴，它与时间轴合在一起就叫观测者的四轴系．这四轴系构成了观测者的一个完整的局域参考系．任何局域的张量性物理量都可以通过向四轴系的投影，使每一分量获得确切的测量意义．

设观测者的世界线的切矢量为 u^ν. 我们把它叫四轴系的第零轴，记为

$$\omega^{\mu}_{\hat{0}} \equiv u^{\mu}, \tag{4.4.1}$$

这里把轴指标 0 加上符号"∧"，以表明它不是张量指标．第零轴是类时轴，即它归一为

$$g_{\mu\nu}\omega^{\mu}_{\hat{0}}\,\omega^{\nu}_{\hat{0}} = -1. \tag{4.4.2}$$

现在我们再引入三个两两正交的类空轴 $\omega^{\mu}_{\hat{a}}$，$a=1,2,3$；并让它们归一为

$$g_{\mu\nu}\omega^{\mu}_{\hat{a}}\,\omega^{\nu}_{\hat{b}} = \begin{cases} 1, & 当\ a = b; \\ 0, & 当\ a \neq b. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

这些轴都与时间轴正交，即

$$g_{\mu\nu}\omega^{\mu}_{\hat{a}}\,\omega^{\nu}_{\hat{0}} = 0. \tag{4.4.4}$$

这样我们就有了一个四轴系 $\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}$，$\alpha=0,1,2,3$. 四轴系的正交归一

性(4.4.2)至(4.4.4)可合并表示成

$$g_{\mu\nu}\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}\ \omega^{\nu}_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}, \tag{4.4.5}$$

其中 $\eta_{\alpha\beta}$是闵柯夫斯基度规．注意，四轴系的第零轴是由观测者的运动情况决定的，而第一、二和三轴的选取有一定的任意性．

为运算方便，我们用闵柯夫斯基度规来定义轴指标 $\hat{\alpha}$的上升和下降，即

$$\omega^{\hat{\alpha}\mu} \equiv \eta^{\alpha\beta}\omega^{\mu}_{\hat{\beta}}. \tag{4.4.6}$$

这样，例如正交归一条件(4.4.5)就可等价地写成

$$\omega^{\hat{\alpha}}_{\mu}\omega^{\mu}_{\hat{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}. \tag{4.4.7}$$

四轴系在四维时空中显然具有完备性，即任一矢量(逆变的或协变的)都可用这组基矢的线性组合来构成，例如

$$A^{\mu} = A^{\hat{\alpha}}\ \omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}. \tag{4.4.8}$$

这里的系数 $A^{\hat{\alpha}}$是矢量 A^{μ} 在第 α 轴上投影的大小．利用正交归一条件(4.4.7)，得出

$$A^{\hat{\alpha}} = A^{\mu}\omega^{\hat{\alpha}}_{\mu}. \tag{4.4.9}$$

(4.4.9)式显示出 $A^{\hat{\alpha}}$在坐标变换下是标量，即它的值与坐标选取无关，因此具有可观测性．把(4.4.9)代回(4.4.8)式，得到

$$A^{\mu} = (\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}\ \omega^{\hat{\alpha}}_{\nu})A^{\nu}. \tag{4.4.10}$$

因为它对任何 A^{μ} 都成立，所以有

$$\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}\ \omega^{\hat{\alpha}}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \tag{4.4.11}$$

它叫四轴系的完备性条件．正交归一条件和完备性条件是四轴系的最基本的性质．

有了四轴系就可以讨论对任一张量性物理量的测量．问题仅在于对任意阶张量来确立一种投影运算．从(4.4.9)式看出，求矢量的投影大小就是把它与某轴基矢作内乘．对任意阶张量，我们可以对它的每一张量指标按类似的方法来投影．例如看动量能量张量 $T^{\mu\nu}$，它通过两个指标的两次投影得到

$$T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = T^{\mu\nu}\omega_{\mu}^{\hat{\alpha}}\omega_{\nu}^{\hat{\beta}}. \tag{4.4.12}$$

这 $T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 包含 4^2 个数，或叫 4^2 个四轴系分量．从坐标系的角度看，它们都是与坐标变换无关的标量．这些标量构成了这观测者对张量性物理量 $T^{\mu\nu}$ 的独立可观测量．当 $T^{\mu\nu}$ 是对称张量时，$T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 也是对称的，因此独立可观测量的个数与张量独立分量的个数是一致的．可观测量的大小取决于观测对象 $T^{\mu\nu}$，也取决于观测者的四轴系，可是与坐标系的选取却无关．这正是§4.1中叙述过的道理．

举几个应用的例子．

例 1　平坦时空中的静观测者的测量．即有

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, \quad \omega_{\hat{0}}^{\mu} = u^{\mu} = (1,0,0,0).$$

我们把三个类空轴取作

$$\omega_{\hat{1}}^{\mu} = (0,1,0,0), \quad \omega_{\hat{2}}^{\mu} = (0,0,1,0), \quad \omega_{\hat{3}}^{\mu} = (0,0,0,1).$$

这四轴系显然满足正交归一条件和完备性条件．对于张量性物理量 $T^{\mu\nu}$，它的可观测量是

$$T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = T^{\mu\nu}\omega_{\mu}^{\hat{\alpha}}\omega_{\nu}^{\hat{\beta}}.$$

利用

$$\omega_{\mu}^{\hat{\alpha}} = g_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\omega_{\hat{\beta}}^{\nu} = \delta_{\mu}^{\alpha},$$

得到

$$T^{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = T^{\mu\nu}\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta} = T^{\alpha\beta}.$$

可见张量 $T^{\mu\nu}$ 的分量本身就是可观测量．这就是狭义相对论中的观测量理论．或者说，它表明狭义相对论不需要一个观测量理论，因为用狭义相对论处理时所用的坐标系与观测者所用的参考系是自然地统一的．

例 2　弯曲时空中的静观测者所测得的能量密度．

某观测者所测到的能量密度应是动量能量张量在他的时间轴上的两次投影 $T^{\hat{0}\hat{0}}$．观测者的时间轴基矢是

$$\omega^{\mu}_{\hat{0}}=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}(1,0,0,0),$$

相应有

$$\omega^{\hat{0}}_{\mu}=\eta^{0\beta}g_{\mu\nu}\omega^{\nu}_{\hat{\beta}}=-g_{\mu\nu}\omega^{\nu}_{\hat{0}}=-\frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{-g_{00}}}.$$

于是

$$T^{\hat{0}\hat{0}}=T^{\mu\nu}\omega^{\hat{0}}_{\mu}\omega^{\hat{0}}_{\nu}=\frac{-g_{\mu 0}g_{\nu 0}}{g_{00}}T^{\mu\nu}.$$

可见在弯曲时空中，即使对相对坐标系静止的观察者，T^{00}也不具有能量密度的含义．这正是广义相对论中需要观测量理论的原因．

例 3 任意度规场中任意观测者的时空间隔测量．

设观测者的四轴系为$\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}$，被观测事件的时空坐标间隔为$dx^{\mu}$．易写出这观测者所测得的时空间隔为

$$\Delta T\equiv dx^{\hat{0}}=dx^{\mu}\omega^{\hat{0}}_{\mu},\quad \Delta X\equiv dx^{\hat{1}}=dx^{\mu}\omega^{\hat{1}}_{\mu},$$

$$\Delta Y\equiv dx^{\hat{2}}=dx^{\mu}\omega^{\hat{2}}_{\mu},\quad \Delta Z\equiv dx^{\hat{3}}=dx^{\mu}\omega^{\hat{3}}_{\mu}.$$

对比用(4.2.16)算出的ΔL，易证明

$$\Delta L^2=\Delta X^2+\Delta Y^2+\Delta Z^2.$$

值得注意，这结果好像说空间是平坦的，但实际上我们处理的空间是弯曲的．原因在于第二章§2.1中叙述过的数学定理，当限于讨论弯曲空间中的一点，总可以适当取坐标，使不变距离由一般的二次型化简为平方和．这完全不表明空间是平坦的．平坦性的特征在于能够同时把一个区域内的度规场化为欧氏型或闵柯夫斯基型．我们所讨论的局域测量理论始终只涉及弯曲时空中的一个点，此外又适当地选用了两两正交的四轴系，因此它会表观地显现出某些类似平坦空间的特征．

§ 4.5　两个观测者的测量的比较

我们来比较两个不同的观测者 u、k（分别以他们的四维速度 u^μ、k^μ 来标志）观测同一个事件间隔 dx^μ 所得的结果．

观测者 u 的四轴系记为 $\omega_{\hat\alpha}^\mu$，按上节的例 3，他测得的时空间隔为

$$
{}_u dx^{\hat\alpha} = dx^\mu \omega_\mu^{\hat\alpha}. \tag{4.5.1}
$$

类似地把观测者 k 的四轴系记为 $\lambda_{\hat\alpha}^\mu$，他测得的时空间隔为

$$
{}_k dx^{\hat\alpha} = dx^\mu \lambda_\mu^{\hat\alpha}. \tag{4.5.2}
$$

由（4.5.1）式解出

$$
dx^\mu = {}_u dx^{\hat\alpha}\, \omega_{\hat\alpha}^\mu,
$$

代入（4.5.2）式得到

$$
{}_k dx^{\hat\alpha} = {}_u dx^{\hat\beta}\, (\omega_{\hat\beta}^\mu \lambda_\mu^{\hat\alpha}). \tag{4.5.3}
$$

从而看到两组观测结果是由线性变换相联系的，变换矩阵为

$$
A_{\hat\beta}^{\hat\alpha} = \omega_{\hat\beta}^\mu \lambda_\mu^{\hat\alpha}, \tag{4.5.4}
$$

它仅取决于两个四轴系，而不依赖于坐标系．

下面我们分析两者测得的时间间隔的关系，

$$
{}_k dx^{\hat 0} = A_{\hat 0}^{\hat 0}\, {}_u dx^{\hat 0} + A_{\hat\alpha}^{\hat 0}\, {}_u dx^{\hat\alpha}. \tag{4.5.5}
$$

按（4.5.4），

$$
A_{\hat\beta}^{\hat 0} = \omega_{\hat\beta}^\mu \lambda_\mu^{\hat 0} = -\omega_{\hat\beta}^\mu k_\mu = -k_{\hat\beta}, \tag{4.5.6}
$$

其中 $k_{\hat\beta}$ 是 k_μ 在四轴系 $\omega_{\hat\beta}^\mu$ 上的投影，即 u 所测到的 k 的四维速度的四轴系分量．利用

$$
\eta_{\alpha\beta} k^{\hat\alpha} k^{\hat\beta} = -1,
$$

以及

$$
k^{\hat\alpha} = k^{\hat 0} v^{\hat\alpha},
$$

其中 $v^{\hat{\alpha}}$ 是从 u 看 k 的三维普通速度的 $\hat{\alpha}$ 轴分量．我们有

$$k^{\hat{0}}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{4.5.7}$$

其中 v 是从 u 看 k 的三维速率．回到(4.5.6)式，就可以写出变换系数

$$A^{\hat{0}}_{\hat{0}}=-k_{\hat{0}}=k^{\hat{0}}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$A^{\hat{0}}_{\hat{\alpha}}=-k_{\hat{\alpha}}=-k^{\hat{\alpha}}=\frac{-v^{\hat{\alpha}}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

把这结果代入(4.5.5)式，得到

$${}_k\mathrm{d}x^{\hat{0}}=\frac{{}_u\mathrm{d}x^{\hat{0}}-v^{\hat{\alpha}}\,{}_u\mathrm{d}x^{\hat{\alpha}}}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{4.5.8}$$

这是以瞬时相对速度 $v^{\hat{\alpha}}$ 所作的洛伦兹变换．其他三个四轴系分量的变换公式也是瞬时洛伦兹变换公式，这里不再重复了．

注意两个观测者的四轴系一般是非惯性系．可是测量结果只依赖观测者的瞬时速度和类空轴的瞬时取向，观测者的加速度及空间轴的转动在这种测量中得不到反映．这使它显示出某种与惯性系类似的行为．

§4.6 局域惯性系条件

作为本章最后一节，我们简单涉及一下四轴系的运动，以说明在什么条件下四轴系才是一个局域的惯性系．

考虑某时空区域内有一类时的曲线族，即区域内每一时空点都属于一条曲线，该曲线的切向量 u^μ 是类时的归一化矢量

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu=-1. \tag{4.6.1}$$

这样每一曲线代表一个运动着的观测者．一般说这种观测者的运动是加速的，它的四维加速度矢量定义为

$$\dot{u}^{\mu} = u^{\mu}{}_{;\nu} u^{\nu}. \tag{4.6.2}$$

对每一个观测者规定一个随动的四轴系，因此四轴系基矢是时空点的函数

$$\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}} = \omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}(x). \tag{4.6.3}$$

每一点上的基矢都满足正交归一条件

$$g_{\mu\nu}\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}\,\omega^{\nu}_{\hat{\beta}} = \eta_{\alpha\beta}, \tag{4.4.5}$$

以及完备性条件．

现在我们讨论四轴系基矢在观测者运动过程中的变率．四轴系作为观测者的局域参考系，它的基矢的变率是否为零正是这局域参考系是否为惯性系的标志．

把轴基矢的变率按自身的轴基矢展开，

$$\dot{\omega}^{\mu}_{\hat{\alpha}} \equiv \omega^{\mu}_{\hat{\alpha};\nu}u^{\nu} = \Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\omega^{\hat{\beta}\mu}, \tag{4.6.4}$$

其中 $\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 是标量，我们将用它作为判断某局域参考是否为惯性系的可观测的依据．

首先来证明，由于四轴系在运动过程中保持正交归一性，所以 $\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 必是反称的．把(4.4.5)式对参量 τ 求微，得

$$\begin{aligned}
&g_{\mu\nu}\dot{\omega}^{\mu}_{\hat{\alpha}}\,\omega^{\nu}_{\hat{\beta}} + g_{\mu\nu}\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}\,\dot{\omega}^{\nu}_{\hat{\beta}} \\
&= g_{\mu\nu}\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}\omega^{\hat{\gamma}\mu}\omega^{\nu}_{\hat{\beta}} + g_{\mu\nu}\omega^{\mu}_{\hat{\alpha}}\,\Omega_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}\omega^{\hat{\gamma}\nu} \\
&= \Omega_{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}\delta^{\gamma}_{\beta} + \Omega_{\hat{\beta}\hat{\gamma}}\delta^{\gamma}_{\alpha} = \Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} + \Omega_{\hat{\beta}\hat{\alpha}} = 0.
\end{aligned} \tag{4.6.5}$$

这就是 $\Omega_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ 的反称性，因此它只包含 6 个独立的标量．

为看清这 6 个标量的物理意义，把(4.6.4)式写开．当 $\alpha=0$，

$$\dot{\omega}^{\mu}_{\hat{0}} = \dot{u}^{\mu} = \Omega_{\hat{0}\hat{\beta}}\omega^{\hat{\beta}\mu} = \Omega_{\hat{0}\hat{a}}\omega^{\hat{a}\mu}, \tag{4.6.6}$$

这里利用了 $\Omega_{\hat{0}\hat{0}}=0$. 由此得出

$$\Omega_{\hat{0}\hat{a}} = \dot{u}^{\mu}\omega_{\hat{a}\mu} \equiv \dot{u}_{\hat{a}}\,. \tag{4.6.7}$$

它说明三个标量 $\Omega_{\hat{0}\hat{a}}(a=1,2,3)$ 是观测者的四维加速度在自身的类空轴上的三个投影．然后在(4.6.4)式中取 $a=1,2,3$，利用结果(4.6.7)，有

$$
\begin{aligned}
\dot{\omega}_{\hat{a}}^{\mu} &= \Omega_{\hat{a}\hat{0}}\omega^{\hat{0}\mu} + \Omega_{\hat{a}\hat{b}}\omega^{\hat{b}\mu} \\
&= \dot{u}_{\hat{a}}u^{\mu} + \Omega_{\hat{a}\hat{b}}\omega^{\hat{b}\mu}.
\end{aligned} \tag{4.6.8}
$$

这正是一个有平动又有转动的普通矢量的变率公式．(4.6.8)右边第一项是类空轴随观测者平动所造成的变率，第二项是类空轴在随观测者运动时轴向的转动带来的变率．类空的三个轴基矢$\omega^{\hat{a}\beta}$的三维转动角速度为

$$
\Omega^{\hat{a}} = \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}\Omega_{\hat{b}\hat{c}}, \tag{4.6.9}
$$

其中

$$
\varepsilon^{abc} = \begin{cases} 1, & a,b,c \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的偶置换;} \\ 0, & a,b,c \text{ 至少有两个相等;} \\ -1, & a,b,c \text{ 是 } 1,2,3 \text{ 的奇置换.} \end{cases} \tag{4.6.10}
$$

当观测者沿测地线运动，即在引力场中自由运动，我们有 $\dot{u}^{\mu}=0$，即

$$
\Omega_{\hat{0}\hat{a}} = 0. \tag{4.6.11}
$$

上面分析表明，这观测者的参考系还不一定是局域惯性系，因为它的三个空间轴可能有转动．如果

$$
\Omega_{\hat{a}\hat{b}} = 0, \tag{4.6.12}
$$

即三个空间轴都不转动，这参考系叫费米平动参考系．现在的结论是：自由下落的费米平动参考系才构成一个局域的惯性系．

第五章　球对称的引力场

球对称物体的引力场是引力理论中最有用的一类情形．著名的牛顿引力定律直接刻画的正是这种引力场．现在我们以广义相对论的引力理论为基础来求解球对称的引力场．

§5.1　球对称度规场的一般结构

度规场是由 $g_{\mu\nu}$ 的 10 个独立分量描述的，每一分量都是时空坐标 x^μ 的四元函数．考虑到 $g_{\mu\nu}$ 所满足的爱因斯坦场方程是一组非线性的偏微分方程组，因此度规场的求解一般说在数学上是一个很复杂的问题．如果所研究的对象具有某种几何对称性，度规场的结构就可以得到简化．现在我们要讨论的是球对称引力源的度规场，在用场方程求解之前，我们先分析一下场的球对称性能使它的结构化简到什么程度．

度规场的空间球对称性意味着能找到三个两两正交的对称轴，绕其中任一轴的无穷小转动都保持度规场不变．用等度规映射和凯林矢量场的概念讲，绕这些轴转动的映射构成等度规映射，转动映射的生成元是凯林矢量场．我们取以这些轴向为基准的类笛卡儿坐标，(x^0, x^1, x^2, x^3)，度规写成

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{0i}dx^0dx^i + g_{ij}dx^idx^j. \qquad (5.1.1)$$

回忆无穷小映射的形式是

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \varepsilon\xi^\mu, \qquad (2.7.2)$$

其中 ξ^μ 叫生成元，ε 是无穷小参量．写出绕 x^1 轴转动的生成元为

$$\xi^0 = \xi^1 = 0, \quad \xi^2 = x^3, \quad \xi^3 = -x^2.$$

无穷小参量 ϵ 代表转过的角度．这生成元可统一地表述为

$$\xi^{\mu}_{(1)} = \delta^{\mu}_{2} x^{3} - \delta^{\mu}_{3} x^{2}. \tag{5.1.2}$$

同样绕 x^2 和 x^3 轴转动映射的生成元可类似地写作

$$\xi^{\mu}_{(2)} = \delta^{\mu}_{3} x^{1} - \delta^{\mu}_{1} x^{3}, \tag{5.1.3}$$

$$\xi^{\mu}_{(3)} = \delta^{\mu}_{1} x^{2} - \delta^{\mu}_{2} x^{1}. \tag{5.1.4}$$

度规场的球对称性说明这三个转动映射的生成元都是凯林矢量，它们都应当满足凯林方程

$$g_{\mu\nu,\rho}\xi^{\rho} + g_{\mu\rho}\xi^{\rho}_{,\nu} + g_{\nu\rho}\xi^{\rho}_{,\mu} = 0. \tag{2.8.6}$$

注意，现在凯林矢量 $\xi^{\mu}_{(1)}$，$\xi^{\mu}_{(2)}$和 $\xi^{\mu}_{(3)}$已经确定，因此凯林方程限制了度规场 $g_{\mu\nu}$的结构．而我们的目的正是要找出满足这些限制条件的度规场的一般结构．

这些限制条件中有三个方程只涉及度规分量 g_{00}，它们是

由 $\xi^{\mu}_{(1)}$得 $\qquad g_{00,2}x^3 - g_{00,3}x^2 = 0$，

由 $\xi^{\mu}_{(2)}$得 $\qquad g_{00,3}x^1 - g_{00,1}x^3 = 0$，

由 $\xi^{\mu}_{(3)}$得 $\qquad g_{00,1}x^2 - g_{00,2}x^1 = 0$.

形式上引用三维矢量记号 $\boldsymbol{r} = (x^1, x^2, x^3)$及$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right)$，上述方程写作

$$\nabla g_{00} \times \boldsymbol{r} = 0.$$

不难看出，g_{00}作为 x^μ 的四元函数的最一般形式只能是

$$g_{00} = F(r, x^0), \tag{5.1.5}$$

其中 $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$，$F$ 是任意函数．这就是球对称性对 g_{00}提出的限制．

凯林方程组中有九个方程只涉及度规分量 g_{0i}，写出三个如下

$$(\nabla g_{01} \times \boldsymbol{r})_1 = 0, \quad (\nabla g_{01} \times \boldsymbol{r})_2 = - g_{03},$$

$$(\nabla g_{01} \times \boldsymbol{r})_3 = g_{02}.$$

其他六个方程可用指标的循环替换得到．这组方程的一般解具有形式

$$g_{0i} = G(r, x^0) x^i, \tag{5.1.6}$$

其中 G 是任意函数．这就是球对称性对 g_{0i}的限制．此外还有 18

个方程对度规场的空-空分量提出了限制．它要求 g_{ij} 必须具有如下的形式

$$g_{ij} = A(r,x^0)\delta^{ij} + B(r,x^0)x^i x^j, \tag{5.1.7}$$

其中 A 和 B 是任意函数．

把上面的结果代回(5.1.1)，我们得到球对称度规的一般结构为

$$\begin{aligned} ds^2 = & F(r,x^0)(dx^0)^2 + 2G(r,x^0)x^i dx^i dx^0 \\ & + A(r,x^0)dx^i dx^i + B(r,x^0)(x^i dx^i)^2, \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

其中只包含有四个任意的二元函数．从(5.1.8)式的形状看出，如采用普通的空间球坐标 (r,θ,φ) 代替 (x^1,x^2,x^3) 将更为方便．这变换给出

$$x^i dx^i = r dr, \tag{5.1.9}$$

$$dx^i dx^i = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{5.1.10}$$

于是(5.1.8)式可重新整理成

$$\begin{aligned} ds^2 = & F(r,t)dt^2 + L(r,t)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ & + M(r,t)dr^2 + N(r,t)drdt, \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

其中 $t \equiv x^0$．它仍包含四个任意的二元函数．

利用坐标的任意性，(5.1.11)式还能化简．作一坐标变换，让 t,θ 和 φ 不变而用 $\tilde{r}$ 代替 r：

$$\tilde{r}^2 = L(r,t).$$

为简单起见，变换后的 r 仍写作 r，度规的结构简化成

$$\begin{aligned} ds^2 = & f(r,t)dt^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \\ & + m(r,t)dr^2 + n(r,t)drdt. \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

若再做一坐标变换，让 r,θ 和 φ 不变而用 $\tilde{t}$ 代替 t，以使 $drd\tilde{t}$ 的系数为零，则度规的结构中就只包含两个任意的未知函数了．这样化简后的度规通常被写成

$$ds^2 = -e^{\nu(r,t)}dt^2 + e^{\mu(r,t)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{5.1.13}$$

它就是充分化简后的球对称度规的一般形式．

至此我们只考虑了度规场的几何对称性和坐标选取的任意性，所以不可能把度规完全确定下来．其中的任意函数 $\mu(r,t)$ 和 $\nu(r,t)$ 须由度规场的动力学规律，即由爱因斯坦引力场方程来确定．

§5.2 席瓦西尔(Schwarzschild)外部解

爱因斯坦引力场方程确立后，席瓦西尔首先求出了真空场方程

$$R_{\mu\nu}=0 \tag{3.5.9}$$

的一个稳定的球对称解．它描述的是静止球对称引力源外部的引力场，因此正是牛顿引力定律的相对论对应．

采用球坐标 $(x^0,x^1,x^2,x^3)=(t,r,\theta,\varphi)$，由上节的(5.1.13)式知，度规分量有形式

$$\begin{aligned}
g_{00}&=-\mathrm{e}^{\nu},\\
g_{11}&=\mathrm{e}^{\mu},\\
g_{22}&=r^2,\\
g_{33}&=r^2\sin^2\theta,
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

所有非对角分量为零．由 $g^{\mu\nu}$ 的定义(2.2.3)解出

$$\begin{aligned}
g^{00}&=-\mathrm{e}^{-\nu},\\
g^{11}&=\mathrm{e}^{-\mu},\\
g^{22}&=\frac{1}{r^2},\\
g^{33}&=\frac{1}{r^2\sin^2\theta},
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

所有非对角分量也为零．现在引力源是静止的，因此它的引力场也应当与 t 无关．这里待求的 μ 和 ν 都只是 r 的函数．下面我们用场方程(3.5.9)来求解这两个函数．

先按公式

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}) \qquad (2.3.7)$$

算出克里斯朵夫联络的非零分量为

$$\Gamma^{0}_{10} = \frac{1}{2}\nu', \quad \Gamma^{1}_{11} = \frac{1}{2}\mu', \quad \Gamma^{1}_{00} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\nu-\mu}\nu',$$

$$\Gamma^{1}_{22} = -r\mathrm{e}^{-\mu}, \quad \Gamma^{1}_{33} = -r\mathrm{e}^{-\mu}\sin^2\theta, \quad \Gamma^{2}_{12} = \frac{1}{r}, \qquad (5.2.3)$$

$$\Gamma^{2}_{33} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^{3}_{13} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^{3}_{23} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$

其中 μ' 和 ν' 分别是 μ 和 ν 对 r 的微商．然后按定义式(1.6.6)和(1.6.3)得出的关系

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\rho} \qquad (5.2.4)$$

计算里契张量．得到的非零分量是

$$R_{00} = \mathrm{e}^{\nu-\mu}\left\{-\frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'}{r} + \frac{\nu'}{4}(\mu' - \nu')\right\}, \qquad (5.2.5)$$

$$R_{11} = \frac{\nu''}{2} - \frac{\mu'}{r} + \frac{\nu'}{4}(\nu' - \mu'), \qquad (5.2.6)$$

$$R_{22} = \mathrm{e}^{-\mu}\left\{1 - \mathrm{e}^{\mu} + \frac{r}{2}(\nu' - \mu')\right\}, \qquad (5.2.7)$$

$$R_{33} = R_{22}\sin^2\theta. \qquad (5.2.8)$$

这样真空场方程具体化为

$$\frac{\nu''}{2} + \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu'}{4}(\mu' - \nu') = 0, \qquad (5.2.9)$$

$$\frac{\nu''}{2} - \frac{\mu'}{r} - \frac{\nu'}{4}(\mu' - \nu') = 0, \qquad (5.2.10)$$

$$1 - \mathrm{e}^{\mu} + \frac{r}{2}(\nu' - \mu') = 0. \qquad (5.2.11)$$

它是 μ 和 ν 的联立微分方程组．这三个方程只有两个是独立的，那是因为爱因斯坦张量必满足毕安基恒等式(2.6.4)的后果．

这组方程很容易求解．将(5.2.9)式减去(5.2.10)式得出

$$\mu' + \nu' = 0, \tag{5.2.12}$$

由此解出

$$\mu + \nu = \lambda, \quad \lambda = \text{const.}. \tag{5.2.13}$$

将(5.2.12)式代入(5.2.11)式消去 ν'，得

$$1 - e^{\mu} - r\mu' = 0,$$

即 $(re^{-\mu})' = 1$. 它的解可写成

$$e^{-\mu} = 1 - \frac{2k}{r}, \quad k = \text{const.}. \tag{5.2.14}$$

再利用(5.2.13)式得

$$e^{\nu} = e^{\lambda-\mu} = e^{\lambda}\left(1 - \frac{2k}{r}\right).$$

注意 $g_{00} = -e^{\nu}$，令 $\lambda = 0$ 相当于改变时间尺度，于是最后得解

$$g_{00} = -e^{\nu} = -\left(1 - \frac{2k}{r}\right), \tag{5.2.15}$$

$$g_{11} = e^{\mu} = \left(1 - \frac{2k}{r}\right)^{-1}. \tag{5.2.16}$$

回忆第三章 § 3.4 中论证过的牛顿近似下

$$g_{00} = -1 + \frac{2GM}{r}, \tag{3.4.15}$$

对比看出 $k = GM$. 相应把不变距离公式写成

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \tag{3.4.16}$$

它就是球对称外引力场的席瓦西尔解.

这引力场与牛顿引力场有一个很重要的共同点. 球外引力场只取决于引力源的总质量，而与引力源的大小和物质密度随 r 的分布无关. 因此若只观测这种引力场，我们只能推知源的总质量，而不能获得关于源的其他信息.

§5.3 伯克霍夫(Birkhoff)定理

如果球对称的引力源不是静止而是在作径向运动，且在运动中保持球对称性，例如在收缩，膨胀或径向振荡，伯克霍夫定理说，它的外引力场仍可用席瓦西尔解描述．

按§5.1的分析，这情况下的度规场总可化成(5.1.13)的形式．其中两个未知函数

$$\nu=\nu(r,t),\quad \mu=\mu(r,t)$$

应由真空场方程 $R_{\mu\nu}=0$ 解出．

这情况与上节的区别在于现在$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}t}$和$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}$不为零．因此克里斯朵夫联络多出三个不为零的分量

$$\Gamma^0_{00}=\frac{1}{2}\dot{\nu},\quad \Gamma^1_{10}=\frac{1}{2}\dot{\mu},\quad \Gamma^0_{11}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mu-\nu}\dot{\mu},\qquad(5.3.1)$$

其中 $\dot{\mu}$ 和 $\dot{\nu}$ 代表 μ 和 ν 对 t 的微商．相应算出里契张量的分量 R_{22} 和 R_{33} 不变，但 R_{00} 和 R_{11} 添了附加的项：

$$R_{00}=\cdots+\frac{1}{2}\left(\ddot{\mu}+\frac{1}{2}\dot{\mu}^2-\frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}\right),\qquad(5.3.2)$$

$$R_{11}=\cdots-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mu-\nu}\left(\ddot{\mu}+\frac{1}{2}\dot{\mu}^2-\frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu}\right),\qquad(5.3.3)$$

其中“…”代表原有的项．此外，里契张量多了一个非零分量

$$R_{01}=-\frac{1}{r}\dot{\mu}.\qquad(5.3.4)$$

从场方程 $R_{01}=0$ 导出

$$\dot{\mu}=0,\qquad(5.3.5)$$

它说明 μ 仍只是 r 的函数．(5.3.5)式代回(5.3.2)和(5.3.3)式，R_{00} 和 R_{11} 中的附加项全部消失，从而其余场方程回复到(5.2.9)至(5.2.11)式．

当同样由场方程解出(5.2.13)时，现在 λ 可以是 t 的任意函

数，

$$\mu+\nu=\lambda(t). \tag{5.3.6}$$

再同样算下去，得到的解是

$$e^{\mu}=1-\frac{2k}{r}, \tag{5.3.7}$$

$$e^{\nu}=e^{\lambda(t)}\left(1-\frac{2k}{r}\right). \tag{5.3.8}$$

这样不变距离公式写成

$$ds^2=-e^{\lambda(t)}\left(1-\frac{2k}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2k}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \tag{5.3.9}$$

这公式与席瓦西尔解的差别仅在第一项多了一个因子 $e^{\lambda(t)}$. 当对时间变量作一变换

$$t\to\tilde{t}=\int e^{\lambda(t)/2}dt,$$

(5.3.9)式即回复到席瓦西尔解，这样就证明了伯克霍夫定理．

伯克霍夫定理的意义在于指明，席瓦西尔解描述的是球对称源的外引力场，但这源不必须是静止的．因此当观测到一个席瓦西尔引力场，我们无法判明它的源是一个稳定的恒星，还是一个膨胀、收缩、振荡的恒星．

§5.4 席瓦西尔坐标的物理意义

在广义相对论中，时空坐标只不过是事件点的数值对应，因此坐标值的大小一般并不具有更直接的几何意义或物理意义．但是对具体问题中按物理情况而适当选取的坐标系，却常常能对事件点的坐标值作出几何的或物理的解释．本节中我们讨论席瓦西尔解中所用的坐标(t,r,θ,φ)的意义．

先看空间坐标与空间测量的关系．这里有两点值得注意．一是席瓦西尔度规中 $g_{0i}=0$，按(4.3.5)，有 $h_{ij}=g_{ij}$，因而相邻点的固

有距离 ΔL 是

$$\Delta L^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r^2 + r^2 \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2. \quad (5.4.1)$$

二是席瓦西尔度规与 t 无关，所以积分性的有限测量是有意义的．

从(5.4.1)式首先看出，等 r 面上的几何与三维欧氏空间中的球面几何是一样的．因此席瓦西尔角坐标 θ 与 φ 仍具有通常的球面角坐标的意义．测量等 r 面上任一大圆的周长 s 将有

$$s = 2\pi r. \quad (5.4.2)$$

测量等 r 面的总面积 A，将得

$$A = 4\pi r^2. \quad (5.4.3)$$

由此可把径向坐标 r 的几何意义解释成等 r 面的面积除以 4π 再开根(或等 r 面上大圆的周长除以 2π)．从这意义上说，r 可叫作等 r 球面的有效半径．但是注意，r 的大小完全不反映等 r 面上任一点至坐标中心($r=0$)的固有距离．这有两方面原因．一方面从(5.4.1)式看到，径向相邻点的固有距离并不与径向坐标差成比例；或者说，比例系数与 r 有关．另一方面，当 $r<2GM$ 时 $g_{rr}<0$，这时席瓦西尔坐标是非物理的，固有距离的概念失却了意义(参看第四章§4.3)．因此如果把等 r 面上任一点至坐标中心的固有距离理解成真实半径，在席瓦西尔场中这真实半径是没有意义的．回到上面的结论：坐标 r 只代表有效半径．

然后讨论时间坐标与时间测量的关系．度规分量 $g_{0i}=0$ 表明席瓦西尔坐标时是全空间对准了的．意思是不同地点的同时事件是用同样的时间坐标标志的．在 $r>2GM$ 的区域内这坐标系是物理的，即可以有静观测者．静观测者用他携带的钟所测到的时间差 ΔT 与坐标时差 Δt 的关系是(参看第四章§4.3)

$$\Delta T = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} \Delta t. \quad (5.4.4)$$

因为坐标时 t 对不同地点是对准了的，故(5.4.4)式说明不同地点时钟的快慢是不一样的，在 r 小(须比 $2GM$ 大)的地方引力越强，

时钟走得越慢．在无穷远处引力消失(g_{00}回到-1)，这情况下$\Delta T=\Delta t$．因此人们也说坐标时是无穷远处观测者的时钟所记录的时间．

§5.5 引力源中的内引力场

现在我们讨论球对称引力源内部引力场的分布问题．

设引力源是静止的理想流体．理想流体的能量动量张量有形式

$$T^{\mu\nu}=(p+\rho)U^{\mu}U^{\nu}+pg^{\mu\nu}, \tag{5.5.1}$$

其中p是压强，ρ是能量密度，U^{μ}是流体元的四维速度．对静止流体，四维速度是

$$U^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}(1,0,0,0), \tag{5.5.2}$$

因此相应混合形式的能量动量张量是

$$T^{\mu}_{\nu}=\begin{pmatrix}-\rho & 0 & 0 & 0\\ 0 & p & 0 & 0\\ 0 & 0 & p & 0\\ 0 & 0 & 0 & p\end{pmatrix}. \tag{5.5.3}$$

内部引力场的场方程写作

$$R^{\mu}_{\nu}-\frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R=-8\pi GT^{\mu}_{\nu}. \tag{5.5.4}$$

利用§5.2中对里契张量的计算，我们得出场方程的分量式

$$e^{-\mu}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\mu'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=-8\pi G\rho, \tag{5.5.5}$$

$$e^{-\mu}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{\nu'}{r}\right)-\frac{1}{r^2}=8\pi Gp, \tag{5.5.6}$$

$$e^{-\mu}\left(\frac{\nu''}{2}-\frac{\mu'\nu'}{4}+\frac{\nu'^2}{4}+\frac{\nu'}{2r}-\frac{\mu'}{2r}\right)=8\pi Gp. \tag{5.5.7}$$

能量动量张量的守恒律$T^{\mu}_{\nu;\mu}=0$给出

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{(p+\rho)}{2}\nu'. \tag{5.5.8}$$

毕安基恒等式决定了(5.5.5)至(5.5.8)式中只有三个独立的方程式．在这方程组中，决定引力场分布的 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$ 与决定引力源内物理参量分布的 $\rho(r)$ 和 $p(r)$ 是联立的，因此这组方程也就是恒星结构的方程．尤其是(5.5.8)式，它实质上是介质的静力平衡方程，至此这组方程并不完备．如果介质的物态方程有形式

$$\rho = \rho(p), \tag{5.5.9}$$

那么方程组就完备了．在恒星表面 $r=R$ 处的边条件是 $p(R)=0$，$\mu(R)$ 与 $\nu(R)$ 与席瓦西尔外部解相衔接，即

$$\mathrm{e}^{-\mu(R)} = \mathrm{e}^{\nu(R)} = 1 - \frac{2GM}{R}. \tag{5.5.10}$$

现在我们讨论这方程组的求解问题．令

$$m(r) = \frac{r}{2G}(1-\mathrm{e}^{-\mu}), \tag{5.5.11}$$

方程(5.5.5)可写成

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r} = 4\pi\rho, \tag{5.5.12}$$

或

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho \mathrm{d}r. \tag{5.5.13}$$

$m(r)$ 的意义可解释为坐标为 r 的球面内的质量．把(5.5.11)代入(5.5.6)式，得到

$$\nu' = \frac{8\pi G p r^3 + 2Gm}{r(r-2Gm)}. \tag{5.5.14}$$

再代入(5.5.8)式，我们得出 $p(r)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{(\rho+p)(4\pi G p r^3 + Gm)}{r(r-2Gm)}. \tag{5.5.15}$$

结合物态方程(5.5.9)，(5.5.15)就可用来求解恒星内部的结构．它是奥本海默(Oppenheimer)求解中子星结构时首次导出的，因此叫奥本海默方程．解出 $p(r)$ 和 $\rho(r)$ 后，通过积分(5.5.13)和

(5.5.14)式，就可得到引力场的分布．

对于较实际的物态方程，奥本海默方程都无法解析地积出．下面我们讨论一种能解析积出的理想模型：均匀密度介质构成的恒星．物态方程写作

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}. \tag{5.5.16}$$

由(5.5.13)式积出

$$m(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_0 r^3, \quad 当\ r \leqslant R. \tag{5.5.17}$$

代入(5.5.15)式，奥本海默方程具有可分离变数的形式

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -\frac{4\pi G r^3(\rho_0 + p)(\rho_0/3 + p)}{r(r - 8\pi G\rho_0 r^3/3)}. \tag{5.5.18}$$

这样就可以积出恒星内压力场的分布

$$p(r) = \rho_0 \left\{ \frac{\left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{1/2}} \right\}, \tag{5.5.19}$$

其中 $M = 4\pi\rho_0 R^3/3$ 是恒星总质量．把这结果代回(5.5.14)式，积出

$$\mathrm{e}^{\nu/2} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2GMr^2}{R^3}\right)^{1/2}, \quad 当\ r \leqslant R. \tag{5.5.20}$$

把(5.5.17)代入(5.5.11)式，得到

$$\mathrm{e}^{-\mu} = 1 - \frac{2Gm}{r} = 1 - \frac{2GMr^2}{R^3}, \quad 当\ r \leqslant R. \tag{5.5.21}$$

这样的内引力场也被称作席瓦西尔内部解．

有一些特征值得指出．恒星的内压力是向中心递增的．中心压强为

$$p_c = \rho_0 \left\{ \frac{1 - \left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1 - \frac{2GM}{R}\right)^{1/2} - 1} \right\}. \qquad (5.5.22)$$

由(5.5.22)式看出，$2GM/R$ 随 p_c 增大而增大．当 p_c 增至无穷，$2GM/R$ 将增至 8/9. 这极限情形下恒星的半径和总质量是

$$R = (3\pi G\rho_0)^{-1/2}, \quad M = \frac{4}{9}(3\pi G^3\rho_0)^{-1/2}.$$

重要的是可以证明，其他物态方程下 $2GM/R$ 的极限值都将小于 8/9. 回忆恒星表面时空偏离平坦的程度是由 $2GM/R$ 标志的，因此这极限值代表了稳定恒星表面引力场强度的极限．这极限的存在纯粹是一种广义相对论效应，在牛顿理论中是没有这种极限的．

第六章　粒子在球对称场中的运动

因为有恒星这样现实的球对称引力场存在，所以粒子在这种场中的运动问题是有实际意义的问题.本章将在广义相对论基础上讨论质点在席瓦西尔场中的运动.它与牛顿理论的相应结果之间的差别是特别令人感兴趣的，因为它可用来检验广义相对论的正确性.

§6.1　时空对称性与守恒量

对称性与守恒量的关系的理论在物理学中有广泛的用途.这里我们将在广义相对论的框架下就质点动力学问题来讨论时空对称性与动力学守恒量的关系.它对求解质点的运动是很有帮助的.

在相对论动力学中，质点的逆变四维动量 p^μ 定义为

$$p^\mu = m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}, \tag{6.1.1}$$

其中 m 是标量性的静质量.由逆变动量可派生地引入协变动量

$$p_\mu = g_{\mu\nu}p^\nu. \tag{6.1.2}$$

下面将看到这个量在动力学中更为重要.当质点在引力场中运动，它的动力学守恒量是由度规场的时空对称性决定的.我们首先可以证明，如果 ξ^μ 所生成的映射是等度规映射，则质点在这度规场中运动时 $p_\mu\xi^\mu$ 是一个守恒量.

这证明是直截了当的.利用标量的普通微商与协变微商的一致性，以及乘积微商的分配律，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p_\mu\xi^\mu) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(p^\mu\xi_\mu) = (p^\mu\xi_\mu)_{,\nu}u^\nu = (p^\mu\xi_\mu)_{;\nu}u^\nu$$

$$= m(u^{\mu}_{;\nu}u^{\nu}\xi_{\mu} + \xi_{\mu;\nu}u^{\mu}u^{\nu}).$$

由粒子在度规场中运动所满足的测地线方程知，上式右边第一项为零，

$$u^{\mu}_{;\nu}u^{\nu} = u^{\mu}_{,\nu}u^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}u^{\sigma}u^{\nu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}u^{\sigma}u^{\nu} = 0.$$

由 ξ^{μ} 所满足的凯林方程知，右边第二项也为零，

$$\xi_{\mu;\nu}u^{\mu}u^{\nu} = \frac{1}{2}(\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu})u^{\mu}u^{\nu} = 0.$$

于是证得$\frac{d}{d\tau}(p_{\mu}\xi^{\mu}) = 0$，即 $p_{\mu}\xi^{\mu}$ 是一个守恒量.

下面我们讨论一种常见形式的凯林矢量

$$\xi^{\mu} = \delta^{\mu}_{k}, \tag{6.1.3}$$

其中 k 取确定值. 这凯林矢量所生成的无穷小映射是

$$\tilde{x}^{\mu} = \begin{cases} x^{\mu}, & \mu \neq k; \\ x^{\mu} + \varepsilon, & \mu = k. \end{cases} \tag{6.1.4}$$

即映射对应点的坐标仅有 x^{k} 改变了一个小量. 这映射是等度规映射，说明度规场 $g_{\mu\nu}$ 与 x^{k} 无关. 这情况下我们叫 x^{k} 是度规场的循环坐标. 当 x^{k} 是循环坐标，相应的运动质点的守恒量是

$$p_{\mu}\xi^{\mu} = p_{\mu}\delta^{\mu}_{k} = p_{k}. \tag{6.1.5}$$

值得强调，守恒的是协变动量而不是逆变动量的对应分量. 这结论在讨论质点动力学问题时很有用.

作为应用的例，看质点在席瓦西尔场中的运动. 由于 t 和 φ 是席瓦西尔度规的循环坐标，所以运动质点的守恒量是 p_{μ} 的 t 和 φ 分量，即

$$p_{0} = g_{0\nu}p^{\nu} = g_{00}p^{0} = -m\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \text{const.}. \tag{6.1.6}$$

$$p_{3} = g_{3\nu}p^{\nu} = g_{33}p^{3} = mr^{2}\sin^{2}\theta\frac{d\varphi}{d\tau} = \text{const.}. \tag{6.1.7}$$

§6.2 席瓦西尔场中的运动方程

现在我们要导出在席瓦西尔场中运动的质点所遵循的动力学微分方程. 同牛顿力学中的有心运动一样,由于左右对称的缘故,质点必在初速度矢量(三维)与力心所构成的对称面上运动. 我们取垂直轨道平面的方向为极轴,则质点的运动满足

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{d\theta}{d\tau} = 0. \tag{6.2.1}$$

按上节的分析,p_0 和 p_3 是守恒量,它写成

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = E, \tag{6.2.2}$$

$$r^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = L, \tag{6.2.3}$$

其中 E 和 L 是积分常量. 此外,四维速度的归一条件 $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$ 也提供一个方程

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = -1. \tag{6.2.4}$$

方程(6.2.1)至(6.2.4)是测地线方程的四个初积分,它们构成质点动力学的一组完备的微分方程组.

整理一下,这方程组可化成更简洁的形式:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{L}{r^2}, \tag{6.2.5}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \dfrac{2GM}{r}}, \tag{6.2.6}$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \tag{6.2.7}$$

它将是后面各节中讨论的出发点.

在应用之前,我们先看一下积分常数 E 和 L 的物理意义. 为

此计算观测者所测到的质点的能量和角动量.在坐标的赤道面($\theta=\pi/2$)上静止的观测者的四维速度是

$$u^{\mu}=\left(\frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{1/2}},0,0,0\right). \tag{6.2.8}$$

他的四轴系类空基矢取作

$$\omega^{\mu}_{\hat{a}}=\frac{1}{\sqrt{g_{aa}}}\delta^{\mu}_{a},\quad 对\ a\ 不求和. \tag{6.2.9}$$

这些观测者测得的质点的能量是 $p^{\hat{a}}$ 的 0 分量,

$$p^{\hat{0}}=p_{\mu}\omega^{\hat{0}\mu}=-p_{\mu}u^{\mu}=-p_{0}u^{0}=\frac{mE}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{1/2}}. \tag{6.2.10}$$

(6.2.10)式表明实测的质点能量 $p^{\hat{0}}$ 并不守恒,它与质点所在地的 $\sqrt{-g_{00}}$ 成反比.这叫质点能量的引力红移(可对比本章§6.6中对光子频率红移的讨论).在无穷远处 $\sqrt{-g_{00}}=1$,于是可以说 E 是无穷远处测到的单位质量质点的能量.这种说法对束缚态质点(见下节)不具有明确的含义,因为那种情况下质点不会达到无穷远处.一般说,E 所反映的是单位质量质点的能量与 $\sqrt{-g_{00}}$ 的乘积.

这些观测者测得的质点的横向(φ方向)动量是 $p^{\hat{a}}$ 的 3 分量,

$$p^{\hat{3}}=p_{\mu}\omega^{\hat{3}\mu}=p_{\mu}\omega^{\mu}_{\hat{3}}=p_{3}\omega^{3}_{\hat{3}}=mL/r. \tag{6.2.11}$$

$rp^{\hat{3}}$ 可叫作质点的等效角动量.冠以"等效"二字,因为 r 不是质点与力心的真实距离而只是有效距离.在这意义上,L 是单位质量质点的等效角动量.

§6.3 运动的分类

这一节我们讨论质点在席瓦西尔场中的运动情况的分类．在讨论相对论之前，先简单回顾一下牛顿力学中与它相对应的分类．

对同一问题，采用同样的坐标，牛顿动力学方程的初积分是

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{r^2}, \tag{6.3.1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2=E+\frac{GM}{r}-\frac{L^2}{2r^2}, \tag{6.3.2}$$

其中 L 和 E 是积分常量，分别代表单位质量的角动量和能量．满足这方程组的运动可分为两大类．一类是按椭圆形轨道运动的束缚态，它对应于 $E<0$ 的情形．另一类是按双曲线或抛物线轨道运动的散射态，它对应于 $E\geqslant 0$ 的情形．特例是 $L=0$ 的情形．这时质点既不是束缚态也不是散射态，它将向力心吸收．我们把这情形叫吸收态．

这种分类定性地可以从(6.3.2)式直观地看出．为此引入径向运动的等效势

$$V=-\frac{GM}{r}+\frac{L^2}{2r^2}, \tag{6.3.3}$$

它是牛顿引力势和离心势的叠加．这等效势的函数图象如图 6.1 所示．利用等效势，径向动力学方程可重新写成

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2=E-V(r). \tag{6.3.4}$$

因等式左边不能为负数，可能的运动只发生在 $E\geqslant V(r)$ 的范围内．看 $L\neq 0$．当 $E<0$，由 $V(r)$ 曲线形状看出，可能的 r 有最大值和最小值，它可由 $E=V(r)$ 解出．这表明它的运动是束缚态．当 $E\geqslant 0$，曲线形状表明 r 可延伸至无穷远，但它必有最小值．这就是散射态．在 $L=0$ 时由于没有离心势，中心排斥力消失了．等效势的形状有了根本的不同．从图 6.1 看出，不管 E 多大，只要向力心运

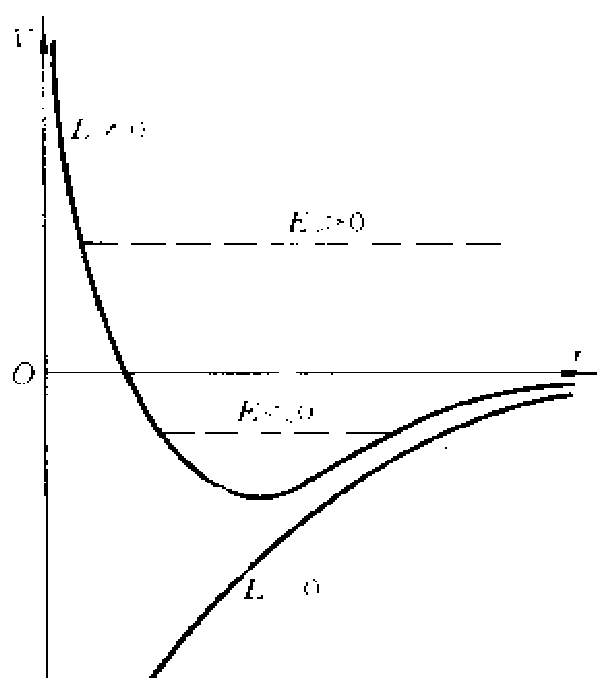


图 6.1　牛顿的等效势

动，它必定坠落到 $r=0$.

现在我们转入讨论相对论性的运动的分类，它完全可按对应的径向方程(6.2.7)类似地作出. 为此我们引入相对论性的等效势

$$U^2=\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(1+\frac{L^2}{r^2}\right). \qquad (6.3.5)$$

这样径向方程可重写作

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=E^2-U^2. \qquad (6.3.6)$$

同样，可能的运动只发生在 $E^2\geqslant U^2$ 的范围内.

把等效势展开

$$U^2=1-\frac{2GM}{r}+\frac{L^2}{r^2}-\frac{2GML^2}{r^3}, \qquad (6.3.7)$$

看出它比牛顿等效势多了两项. 多出的常数 1 不是实质性的. 因相对论性的能量包括静止能，所以无穷远处静止质点的 E 是 1，而不像非相对论情况下它是零. 实质的差别在于增加了一项

$-2GML^2/r^3$. 它的负幂次最高，所以在 r 较大时它不起显著作用，牛顿力学构成好的近似；在 r 很小时它起决定作用，等效势由于这个新的吸引心而根本改变了形状.

为分析的方便，我们以 GM 为 r 的单位，把等效势用无量纲量表述

$$U^2 = 1 - \frac{2}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} - \frac{2\tilde{L}^2}{r^3}, \qquad (6.3.8)$$

其中 $\tilde{L}=L/GM$，即以 GM 为单位时的 L. $U^2(r)$的形状只依赖单一参量 $\tilde{L}$. 参量取各种值时的等效势如图 6.2 所示.

从图线看出，当 $\tilde{L}>4$，在 r 很小的地方有一个峰值大于 1 的势垒，此外在 r 较大的地方仍有一势阱. 这就把可能的运动分成了三类：

$$\begin{aligned} &E^2 < 1, && \text{束缚态；} \\ &1 \leqslant E^2 < U^2_{\max}, && \text{散射态；} \\ &E^2 \geqslant U^2_{\max}, && \text{吸收态.} \end{aligned}$$

随 $\tilde{L}$ 的减小，中心势垒降低它的高度. 在 $2\sqrt{3} \leqslant \tilde{L} \leqslant 4$ 的范围内 $U^2_{\max} \leqslant 1$（参看图 6.2）. 这情况下出现散射态的可能消失了，只有束缚态和吸收态. 若 $\tilde{L}<2\sqrt{3}$，等效势的峰与谷都消失，这时唯一的可能是被力心吸收. 这就是相对论性球对称场中运动的分类. 注意，上述分析基于一个假定，即引力源的几何半径充分小，以至席瓦西尔外部界对很小的 r 仍能适用.

相对论性的结果与牛顿结果的重要不同之一是场中运动质点被引力源吸收的可能增加了. 按牛顿理论，运动质点的角动量必须充分小，即运动方向几乎是准确地指向引力源，它才可能落到引力源上去. 否则它在越过双曲线的近心点后将重新向远处飞去而构成散射态. 按相对论性的分析我们看到，即使 L 很大，只要 E 充分大，质点就会绕力心回旋多次后坠落. 这一点对讨论致密天体对空

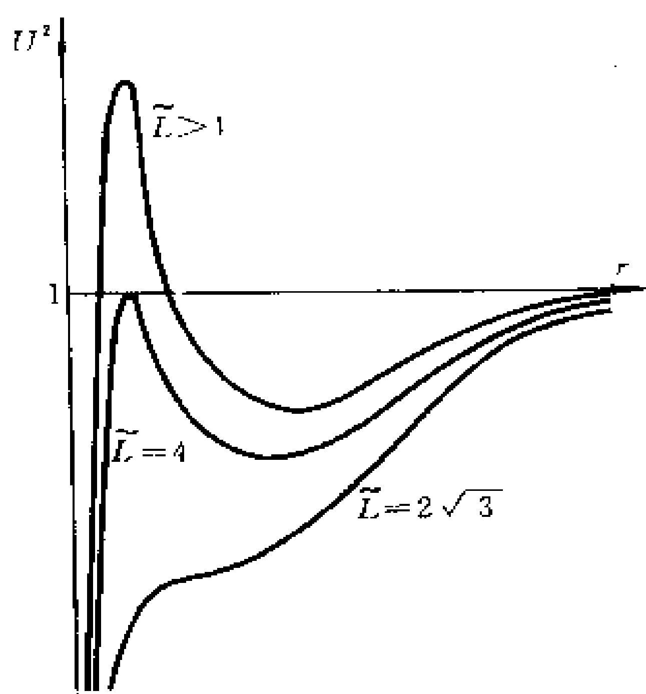


图 6.2 相对论性等效势

间粒子的吸积问题是一个重要的观念.

还有一个重要的不同点. 按牛顿理论,可以实现半径任意小的圆轨道,即结合能任意大的束缚态. 从相对论的等效势看出,最小的圆轨道半径是 $6GM$,它是由

$$\frac{\mathrm{d}(U^2)}{\mathrm{d}r}=0 \text{ 和 } \frac{\mathrm{d}^2(U^2)}{\mathrm{d}r^2}=0$$

算出的. 束缚态中单位静质量质点的结合能定义为 $1-E$. 容易算出最小圆轨道中这结合能的大小是 0.057. 这意味着原来在远处静止的质点在逐步丢失能量而过渡到这束缚态的过程中,它的静止能的 5.7%将被释放出来. 回忆核反应的能量释放率仅为 0.7%,这是一个极强有力的能量释放机制. 人们猜想类星体的巨大的辐射功率很可能与这种能量释放机制有关.

§6.4 行星的轨道

为了便于对比，同样先回顾一下牛顿的行星轨道理论.

利用(6.3.1)式，把(6.3.2)式化为 r 对 φ 的微分方程，它是

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2=\frac{E}{L^2}+\frac{GM}{rL^2}-\frac{1}{2r^2}. \tag{6.4.1}$$

为下面讨论方便，把它化为二阶微分方程. 把(6.4.1)两边对 φ 求微商，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{GM}{L^2}, \tag{6.4.2}$$

这是轨道的微分方程，在牛顿力学中叫比内(Binet)公式. 为了使量值大小有清楚的意义，我们把变量和参量无量纲化，定义

$$u=\frac{GM}{r}. \tag{6.4.3}$$

比内公式重写成

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=\left(\frac{GM}{L}\right)^2, \tag{6.4.4}$$

这里每一项都是无量纲的. 这方程的解是

$$u=\left(\frac{GM}{L}\right)^2(1+e\cos\varphi). \tag{6.4.5}$$

对行星讲，偏心率 e 是小于 1 的，相应的轨道是一个椭圆.

相对论性的动力学方程可作类似的处理. 利用(6.2.5)把(6.2.7)式化为 r 对 φ 的微分方程，

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2=\frac{E^2-1}{2L^2}+\frac{GM}{rL^2}-\frac{1}{2r^2}+\frac{GM}{r^3}. \tag{6.4.6}$$

同样两边对 φ 求微商，得出比内公式的相对论推广

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{GM}{L^2}+\frac{3GM}{r^2}. \tag{6.4.7}$$

再同样按(6.4.3)式引用无量纲变量 u，方程化为

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \left(\frac{GM}{L}\right)^2 + 3u^2. \quad (6.4.8)$$

把它与非相对论公式(6.4.4)比较,(6.4.8)中仅多了一项 $3u^2$.

我们用实际的行星估算一下各项的量级. 对太阳,有

$$GM = 1.5 \times 10^3 \text{ m}.$$

太阳系中水星的轨道半径最小(即 u 最大),它的值为

$$r = 5 \times 10^{10} \text{ m}.$$

相应看出无量纲变量 u 是量级为 10^{-7}的小量. 由(6.4.5)知,$(GM/L)^2$ 也具有同样的量级. 然后看相对论的轨道微分方程(6.4.8). 其中 u 与$(GM/L)^2$ 的量级对水星已估出为 10^{-7},相对论修正项 $3u^2$ 具有 10^{-14}的量级,它是一个很小的修正. 因为对其他行星,这个修正项将更小,所以我们先来计算相对论效应对水星轨道的影响.

考虑到牛顿解(6.4.5)可以作为相对论性方程(6.4.8)的零级近似,我们把它代入修正项,以使非线性微分方程变为线性非齐次方程,

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u &= \left(\frac{GM}{L}\right)^2 + 3\left(\frac{GM}{L}\right)^4(1 + e\cos\varphi)^2 \\ &\approx \left(\frac{GM}{L}\right)^2 + 3\left(\frac{GM}{L}\right)^4 + 6\left(\frac{GM}{L}\right)^4 e\cos\varphi. \quad (6.4.9)\end{aligned}$$

这里利用了水星轨道的 $e \ll 1$ 的事实,即它很接近于圆形. 式中常数 $3(GM/L)^4$ 是对$(GM/L)^2$ 的小修正,它将微小地改变椭圆长轴的长度. 我们对这个改变不感兴趣,因为它不可能被测得非常准确. 略去这项后方程变成

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \left(\frac{GM}{L}\right)^2 + 6\left(\frac{GM}{L}\right)^4 e\cos\varphi. \quad (6.4.10)$$

作为线性方程,我们把它分两部分来解. 令

$$u = u_1 + u_2.$$

其中 u_1 满足

$$\frac{d^2u_1}{d\varphi^2}+u_1=\left(\frac{GM}{L}\right)^2,\tag{6.4.11}$$

u_2 满足

$$\frac{d^2u_2}{d\varphi^2}+u_2=6\left(\frac{GM}{L}\right)^4 e\cos\varphi,\tag{6.4.12}$$

(6.4.11)式有通解

$$u_1=\left(\frac{GM}{L}\right)^2(1+e\cos\varphi),$$

(6.4.12)式有特解

$$u_2=3\left(\frac{GM}{L}\right)^4 e\varphi\sin\varphi.$$

于是得出方程(6.4.10)的通解为

$$\begin{aligned}u&=u_1+u_2=\left(\frac{GM}{L}\right)^2\left(1+e\cos\varphi+3\left(\frac{GM}{L}\right)^2 e\varphi\sin\varphi\right)\\&\approx\left(\frac{GM}{L}\right)^2\left\{1+e\cos\left[1-3\left(\frac{GM}{L}\right)^2\right]\varphi\right\}.\end{aligned}\tag{6.4.13}$$

这里最后的等式须忽略$(GM/L)^6$以上的小量.

相对论修正后的水星轨道(6.4.13)与牛顿轨道(6.4.5)的差别在于轨道近日点与远日点有进动发生. 近日点的标志是

$$\left[1-3\left(\frac{GM}{L}\right)^2\right]\varphi=2n\pi,\quad n=0,1,2,\cdots,\tag{6.4.14}$$

即

$$\varphi=\frac{2n\pi}{1-3\left(\frac{GM}{L}\right)^2}\approx 2n\pi\left[1+3\left(\frac{GM}{L}\right)^2\right].\tag{6.4.15}$$

两个相邻的近日点方位角之差是

$$\Delta\varphi=6\pi\left(\frac{GM}{L}\right)^2.$$

代入水星的观测数据,得到$\Delta\varphi=0.1''$. 这是一个很小的数字,但它是会长期积累的. 水星公转周期是 0.24 a(a 为年的符号),因此每一世纪积累的近日点偏转角是 43″.

观测表明水星近日点的偏转角为每世纪 5600.73±0.41″. 由牛顿理论算出其他行星的摄动导致的偏转角为 5557.62±0.20″. 其差值 43.11±0.45″与广义相对论预言值的符合是惊人的. 但对于是否还有其他重要因素在引起附加进动的问题,至今仍有争议. 讨论得很多的是太阳扁率的影响. 本世纪初观测使人们相信太阳扁率不致在这里产生显著影响. 60 年代迪克(Dicke)等人定出扁率为$(5.0\pm0.7)\times10^{-5}$. 它就可能引起每世纪 3.4″的附加进动. 由于这种争议夹杂了许多不确定因素,因此很难有明确的结论. 无论如何,水星近日点进动问题是对广义相对论的巨大支持,这是可以肯定的.

§6.5 光子轨线的引力偏折

在讨论等效原理时我们已指出,在牛顿理论中质点的加速度 $a=F/m$,而引力 F 正比于 m,所以质点的加速度与它的固有属性无关,仅取决于引力场. 这样会引出一个有趣的问题. 光子作为零静质量粒子,它在引力场中是否也会有同样的加速度,从而引起轨道的偏折?在实践上,光子速度很大,这一点偏折很难测到,因而没有明确的回答. 在理论上,肯定与否定的回答都不至于与牛顿理论的框架相冲突,从而也没有结论. 在广义相对论中情况却不同. 由等效原理可以论证,光子的轨线必然有引力偏折.

先看一个理论上的原因. 牛顿力学中认为质量是质点的固有属性(即与它的运动无关),它反映惯性(即不易被加速的程度). 在狭义相对论中质量的概念变复杂了. 从相对论动力学看,动质量$(m=E)$反映质点不易被加速的程度,即惯性;但它与速度有关,即不是质点的固有属性. 静质量是标量,它是质点的固有属性;但不代表惯性. 弱等效原理认为引力质量与惯性质量相等,这惯性质量应指质点的动质量. 光子是以静质量等于零为特征的,但它的动质量不为零. 按普朗克公式,$m=E=h\nu$,ν 是光子的频率. 于是等效原

理对光子作出了推论：光子应具有引力质量，即光子能产生引力场，也必会受其他物体的引力场的作用.

此外还可有一个很直观的论证. 设想一"静止"升降机中的观测者看到外面射进来的光线是直线行进的(图 6.3). 当此升降机加速向上运动，他将发现光线沿向下弯曲的曲线行进. 按广义相对论前的物理学，这光线的弯曲归之于参考系的加速性，即惯性力. 如接受了等效原理，它就只能被认为是引力的效果.

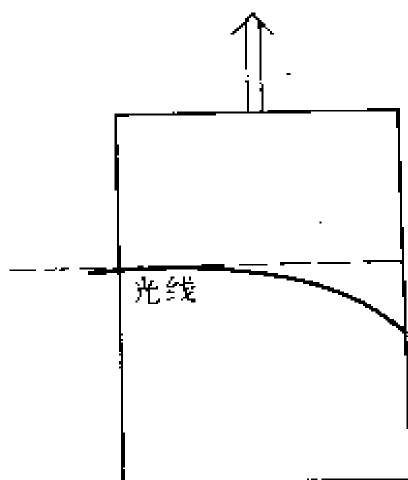


图 6.3 加速升降机中的光线

现在我们讨论光子在引力场中的运动. 它与前面讨论质点的运动有些不同. 光子的运动是由 $ds=0$ 刻画的，因此 s 不能用作光子世界线上的仿射参量. 与此有关的是光子静质量为零，于是四维动量的定义式(6.1.1)对它不适用. 我们可以任选一标量性的仿射参量 λ，把光子四维动量定义为

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \tag{6.5.1}$$

当光子在席瓦西尔场中沿测地线运动，仍有 p_0 和 p_3 守恒，写作

$$r^2\frac{d\varphi}{d\lambda} = L. \tag{6.5.2}$$

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda} = E. \tag{6.5.3}$$

现在由 $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu=0$ 给出第三个初积分，它可化成

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right). \tag{6.5.4}$$

(6.5.2)至(6.5.4)式是光子的动力学方程组. 由(6.5.2)和(6.5.4)式消去参量 λ，得到光子的轨道方程

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{E}{L}\right)^2 - \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2GM}{r}\right), \tag{6.5.5}$$

它依赖于一个参量 E/L. 令

$$b = \frac{L}{E},$$

在远处 E 是线动量大小，L 是角动量大小；所以 b 代表等效的瞄准距离，或叫碰撞参量.

为讨论光子运动的分类，我们定义光子的等效势 $B^2(r)$，

$$B^2(r) = \frac{r^2}{1 - 2GM/r}. \tag{6.5.6}$$

这样光子轨道方程(6.5.5)改写成

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{1}{B^2(r)}. \tag{6.5.7}$$

$B^{-2}(r)$的函数图象由图 6.4 所示. $B^{-2}(r)$在 $r=3GM$ 处有一峰，峰高为$(27M^2)^{-1}$. 光子的可能运动必须满足条件

$$b^2 \leqslant B^2(r).$$

由图线可看出，当光子以 $b>3\sqrt{3}GM$ 入射，它最终必将被散射回无穷远处. 当以 $b<3\sqrt{3}GM$ 入射，它将回旋地落入力心.

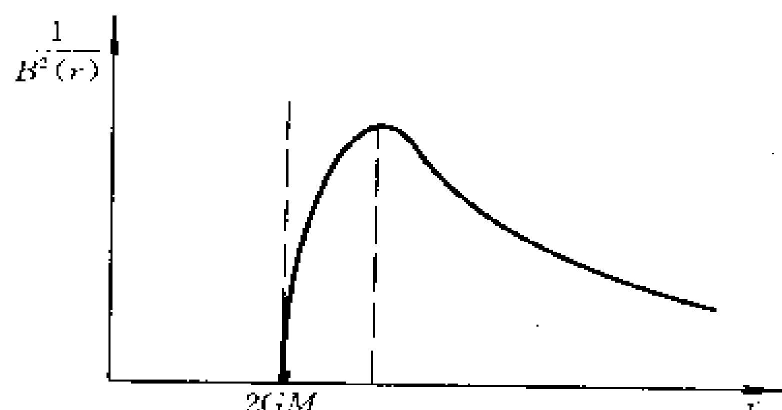


图 6.4 光子的等效势

要使光线被引力场强烈地偏转，引力源的几何半径必须是 $3GM$ 的量级. 我们知道，除中子星外，其他类型的已知恒星的半径

都比它大很多量级.在这种情况下,光线只会受引力的影响而发生微小的偏折.作为可观测的例子,我们讨论太阳引力对擦过它表面的星光的偏折(图 6.5).

同样引入无量纲变量 $u=GM/r$ 代替 r,我们把光子轨道方程(6.5.5)化成

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=3u^2. \tag{6.5.8}$$

因为太阳半径远大于 GM,u 永远是小量,所以又可以采用逐次逼近的方法求解.先略去二级小量 $3u^2$,解出零级近似

$$u=u_0\cos\varphi. \tag{6.5.9}$$

它是一条垂直极轴的直线.然后把零级近似代入(6.5.8)式的右边,来计算二级小项引起光线的偏折.代入后的方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}\varphi^2}+u=3u_0^2\cos^2\varphi. \tag{6.5.10}$$

这方程有一特解

$$u=u_0^2(1+\sin^2\varphi). \tag{6.5.11}$$

由此易得知偏折光线的一级近似解为

$$u=u_0\cos\varphi+u_0^2(1+\sin^2\varphi). \tag{6.5.12}$$

零级解(6.5.9)在远处($u=0$)的方位角是 $\pm\pi/2$.一级解(6.5.12)在远处的方位角是 $\pm(\pi/2+\alpha)$,其中 α 是小量,它满足

$$-u_0\sin\alpha+u_0^2(1+\cos^2\alpha)=0.$$

对 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 作泰勒展开后保留主项,则可解出

$$\alpha=2u_0=\frac{2GM}{R},$$

其中 R 是太阳半径.于是最终得出光线的偏折角

$$\Delta\theta=2\alpha=\frac{4GM}{R}, \tag{6.5.13}$$

代入太阳的数据,算出 $\Delta\theta=1.75''$.

我们也计算一下牛顿理论下的结果.把牛顿动力学用于光子,轨道方程仍为(6.4.2).注意光子在远处不受引力时速度 $v=1$,所

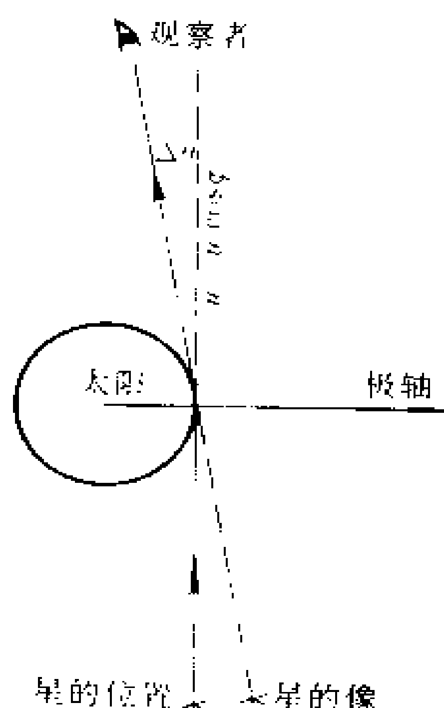


图 6.5 星光的偏折

以有 $L=Rv=R$. 方程(6.4.2)用变量 u 写成

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=u_0^2. \tag{6.5.14}$$

忽略 u_0^2 后的解仍是直线(6.5.9). 考虑 u_0^2 引起的修正后的解是

$$u=u_0\cos\varphi+u_0^2. \tag{6.5.15}$$

仍令入射和出射光线的方位角为 $\pm\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$,则有

$$\sin\alpha=\alpha=u_0=\frac{GM}{R}.$$

即偏折角 $\Delta\theta$ 是相对论预言值的一半,即 0.875″.

在 1919 年 5 月发生的日全蚀时,两个观测队第一次实测了通过太阳表面的星光的偏折. 所得结果是 $\Delta\theta=(1.98\pm0.12)''$ 和 $(1.61\pm0.30)''$. 它与相对论的结果相符. 在各次日蚀中,至今已对四百多颗恒星作了这种测量. 观测数据的范围是从 1.57″至 2.37″,平均值是 1.89″. 它与相对论符合得很好.

§6.6 光频的引力红移

当光子在稳定的引力场中传播，不同地点的静观测者将测得不同的频率. 这叫光频的引力红移. 它是等效原理的又一推论.

对稳定的引力场，适当地选取坐标可使度规 $g_{\mu\nu}$ 与 x_0 无关. 静观测者测到的光子能量为

$$E = -p_\mu U^\mu, \tag{6.6.1}$$

其中 p_μ 为光子的四维动量，U^μ 为观测者的四维速度，它有形式（参看第四章 §4.3）

$$U^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}(1,0,0,0). \tag{6.6.2}$$

把(6.6.2)用于(6.6.1)式，得

$$E = \frac{-p_0}{\sqrt{-g_{00}}}. \tag{6.6.3}$$

按普朗克公式 $E=h\nu$，(6.6.3)式重写作

$$\sqrt{-g_{00}}\,\nu = -p_0/h. \tag{6.6.4}$$

这等式右边是常数，因为粒子在稳定场中运动时 p_0 是守恒量. 于是，(6.6.4)式说明，光频 ν 与所在地的 $\sqrt{-g_{00}}$ 成反比.

具体看席瓦西尔引力场. 它有

$$-g_{00} = 1 - \frac{2GM}{r}.$$

代入(6.6.4)得到

$$\nu\sqrt{1-\frac{2GM}{r}} = -\frac{p_0}{h}. \tag{6.6.5}$$

在离引力中心越远的地方测到的频率越小，因此叫引力红移. 这是一种与多普勒(Doppler)红移完全不同的红移机制.

在弱引力场中,这红移量很小.在太阳表面测起来频率应为 ν_0 的光在传播至远处时频率变为 ν, ν 与 ν_0 之比是

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} \approx 1 - \frac{GM}{R}. \qquad (6.6.6)$$

通常定义红移量 $z = \nu_0/\nu - 1$. 于是,

$$z \approx \frac{GM}{R}. \qquad (6.6.7)$$

我们又一次看到,弱中心引力场中的效应具有 GM/R 的量级.对于太阳,它的值约为 10^{-6}.这红移量容易被其他效应所模糊或掩盖.例如太阳表面的大气湍流所产生的多普勒红移就可能大于它.所以很难用测量来检验.60 年代,庞德(Pound)等人利用穆斯堡尔(Mössbauer)效应的原理在地球上测量从二十多米高射向地面的光线的蓝移(这是从位能高的地方射向位能低的地方,因而是蓝移).蓝移量的大小是 10^{-15} 的量级.实验结果与理论预言符合得很好.它被认为是支持广义相对论的重要实测证据之一.

最后讨论一下光源的固有频率的概念.与广义相对论前的物理学一样,光源的固有频率,是指相对光源静止的观测者测到的源所放的光子的频率.为具体起见,考虑原子的能级跃迁为光源.原子的固有频率取决于原子的能级结构,因此是它的固有属性.这里要指出的是作为等效原理的后果,光源的固有频率与引力场也无关,因为按等效原理,局域的引力场总可通过引入局域惯性系而使之消失.于是,太阳上的氢原子,地球上的氢原子及遥远的引力场已消失处的氢原子具有相同的固有频率.太阳上运动的氢原子跃迁所放的光的频率在相对该原子静止的观测者看来是固有频率;如果原子是在运动的,相对太阳静止的观测者会看到频率的多普勒红移;而远处的静观测者接收到远光子时则将看到多普勒红移和引力红移的联合效果.

第七章 黑 洞

拉普拉斯(Laplace)曾在牛顿力学的基础上指出,若恒星的半径 R 小于 $2GM/c^2$(c 是光速),恒星表面所放的光将不能传播到无穷远处,从而远处的观测者不能看到这恒星.现在人们常把它作为黑洞观念的开端.可是,广义相对论的黑洞概念与它还是有本质区别的.按广义相对论,这种恒星的外部会有一个特殊的时空区,在那里光和其他粒子都只能单向地向引力源下落,而不可能静止或向外运动.恒星物质本身也只能不断收缩而变成密度为无穷的奇点.这种特殊的时空区就叫作黑洞.尽管人们至今尚未直接找到黑洞,但有许多理论上的原因和观测上的迹象使天体物理学家们相信黑洞在自然界中应该是存在的.本章将主要讨论席瓦西尔型黑洞的有关概念.最后还将介绍60年代末以来黑洞理论的发展.

§7.1 $r=2GM$ 球面上时空的非奇异性

设想有一质量为 M 而等效半径 r 几乎为零的致密恒星.席瓦西尔外部解

$$ds^2=-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2$$
$$+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \qquad (7.1.1)$$

作为它的外引力场,几乎在全空间适用.在 $r>2GM$ 的区域内,坐标系是物理的.相应的物理性质已在前两章讨论过了.注意 $r=2GM$ 的球面.这等效半径 r 被称为席瓦西尔半径或引力半径.

引力半径处首先的特征是

$$g_{00}=0, \quad g^{00}=\infty,$$

$$g_{11}=\infty,\quad g^{11}=0. \tag{7.1.2}$$

度规的发散可能说明这是时空的奇异点，那里物理规律失去了意义．但也有可能它仅是坐标系的选择不当而带来的．我们将从物理的讨论来说明这里遇到的是后一情况．

考虑物体在引力作用下从 $r>2GM$ 处向中心的径向下落．按第六章§6.2，动力学方程是

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=E^2-\left(1-\frac{2GM}{r}\right), \tag{7.1.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}=E\bigg/\left(1-\frac{2GM}{r}\right). \tag{7.1.4}$$

当 r 逼近引力半径 $2GM$，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}\tau$ 是有限值，而 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ 却趋于无穷．因而有三维速度

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\bigg/\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\to 0. \tag{7.1.5}$$

这结果与初速度无关，它似乎表明物体永远也不会穿过引力半径．注意到 t 代表远处观测者的时间（参看第五章§5.4），所以结论只能是远处观测者永远不能看到自由下落物体穿过引力半径．但是，如果我们不是作为旁观者从远处观测，而是作为探险者随物体下落，这时固有时 τ 才代表我们的时间．(7.1.3)表明我们的下落速度 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}$ 一直是有限的，所以引力半径是可以穿过的．我们现在来求解这运动．

设开始从静止下落时的有效半径 $r=r_0$，方程(7.1.3)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2=2GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right). \tag{7.1.6}$$

这方程容易求得一参数式的解

$$r=\frac{r_0}{2}(1+\cos\eta),$$

$$\tau=\frac{r_0}{2}\left(\frac{r_0}{2GM}\right)^{1/2}(\eta+\sin\eta). \tag{7.1.7}$$

开始时 $\eta=0$．以后 τ 随 η 增加，r 随 η 增大而减小．当达到 $r=$

$2GM$，η 满足

$$\cos\eta = \frac{4GM}{r_0} - 1,$$

因而时间 τ 是有限的. 穿过引力半径后它仍将继续下落. 当 $\eta=\pi$，即 $r=0$，相应的时间是

$$\tau = \frac{\pi r_0}{2}\left(\frac{r_0}{2GM}\right)^{1/2}. \tag{7.1.8}$$

可见我们将在有限时间内一直落到引力中心，而没有遇到任何物理上不可逾越的时空奇点. 这分析说明 $r=2GM$ 处引力强度是有限的，时空结构也是正常的. 问题仅在于把与无穷远处的时钟相对准的时间坐标用在引力半径处是不合适的.

$r=2GM$ 处时空的非奇异性也可从别的角度看出. 计算 $r=2GM$ 球面与其他球面的固有距离，我们得到

$$\int_{2GM}^{r} |g_{11}|^{1/2}\mathrm{d}r = \begin{cases} [r(r-2GM)]^{1/2} \\ \quad + 2GM\ln\left[\left(\dfrac{r}{2GM}-1\right)^{1/2} + \left(\dfrac{r}{2GM}\right)^{1/2}\right], \\ \qquad\qquad\qquad r > 2GM, \\ -2GM\cot^{-1}[r^{1/2}/(2GM-r)^{1/2}] \\ \quad - [r(2GM-r)]^{1/2}, \qquad r < 2GM. \end{cases}$$

对 $0<r<\infty$，它都是有限的. 另外若计算曲率张量 $R_{\mu\nu\rho\lambda}$，我们得到非零分量为

$$R_{0101} = -\frac{2GM}{r^3}, \quad R_{0202} = R_{0303} = \frac{GM}{r^3},$$

$$R_{2323} = \frac{2GM}{r^3}, \quad R_{1212} = R_{1313} = -\frac{GM}{r^3}.$$

它们在引力半径处也都是有限的，曲率张量的奇点只在 $r=0$ 处.

§7.2 引力半径内的时空结构

$r=2GM$ 的球面虽不是奇点构成的，但它确是一个特殊的面，

以它为界，内部区域与外部区域的时空结构有着重要的区别.

为阐明这区别，我们先回忆一下闵柯夫斯基时空中光锥的概念. 采用球坐标，闵柯夫斯基时空中的不变距离是

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (7.2.1)$$

光的运动满足 $ds^2=0$，因此对径向传播的光有

$$\frac{dr}{dt} = \pm 1, \qquad (7.2.2)$$
$$r = \pm t + C.$$

这直线叫 r-t 图上的光锥(图 7.1). 任何静质量不为零的质点的运动必满足 $ds^2<0$，即

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < 1. \qquad (7.2.3)$$

这部分叫光锥的内部. 从任一时空点看，物理上能实现的运动总限于该点的光锥内方向. 零质量的粒子则沿光锥线运动. 从该点向光锥外方向的运动意味着超光速，因而是物理上不可能的. 光锥向着两个相反的方向展开，其中 $dt>0$ 的部分叫将来光锥，$dt<0$ 的部分则叫过去光锥. 物理的运动是从过去光锥走向该点，然后从该点走向将来光锥.

现在用光锥的概念来讨论光在席瓦西尔场中的径向运动. 由 $ds^2=0$，得出席瓦西尔场中的光锥方程

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1-\frac{2GM}{r}}. \qquad (7.2.4)$$

容易解出光锥线是

$$\pm t = r + 2GM\ln\left|1-\frac{r}{2GM}\right| + \text{const.}. \qquad (7.2.5)$$

这些光锥线示于图 7.2 中. 为方便起见，引入

$$r^* = r + 2GM\ln\left|1-\frac{r}{2GM}\right|, \qquad (7.2.6)$$

光锥线可写作

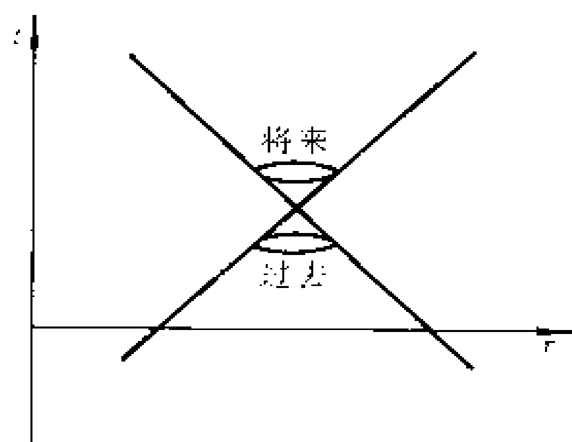


图 7.1　闵柯夫斯基空间的光锥

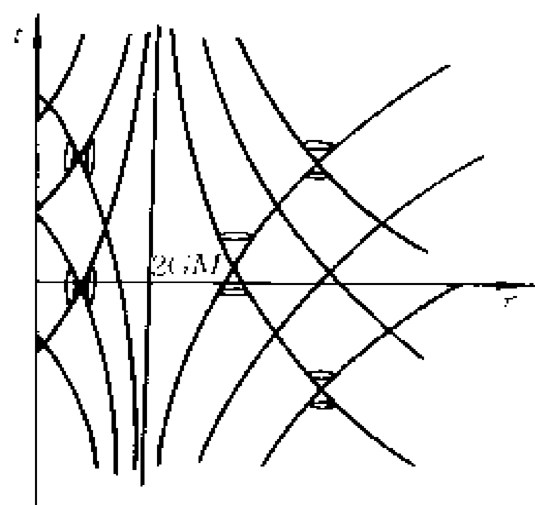


图 7.2　席瓦西尔坐标下的光锥

$$t + r^* = V, \tag{7.2.7}$$

$$t - r^* = U, \tag{7.2.8}$$

其中 V 和 U 是积分常数. 当 $r>2GM$,(7.2.7)式描述光的径向向内的运动,(7.2.8)式描述光的径向向外的运动. 其它非零质量粒子也同样可以径向向内或径向向外运动. $r>2GM$ 区域内的光锥线有一个引人注意的特征,即没有一条光锥线能穿过引力半径球面. 所有光锥线都渐近地逼近它,说明一切粒子都要花费无穷长的时间 t 去靠近引力半径. 因此即使穿过引力半径面的运动实际上能发生,这样的时间坐标 t 已无法描述了.

我们暂时放下如何穿过引力半径的问题,而来讨论引力半径内的时空结构. 这区域内的光锥线仍示于图 7.2. 光锥线本身并没有显著特征,可是光锥内外的取向却不一样了. 注意物理的运动满足 $ds^2 \leqslant 0$,现在由于 $1-\dfrac{2GM}{r}<0$,所以光锥内方向应满足

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \geqslant \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^2. \tag{7.2.9}$$

这方程所决定的两个方向不是 t 的增加和减少方向,而是 r 的增加和减少方向. 这一差别显示了引力半径内部区域的一些非常不

寻常的特征. 首先,$\frac{dr}{dt}=0$ 是非物理的;即任何粒子都不可能静止于内部区. 这正是黑洞概念的要点之一. 其次,物理的运动可导致 t 的增加,也可导致 t 的减小. 注意在这种时间坐标下,内部与外部无法沟通,所以这一点除了进一步说明席瓦西尔时间坐标 t 在 $r\leqslant 2GM$ 区域内的不适宜,此外并不会给外部区域带来因果的混乱. 再则,物理的运动只能导致 r 的单调增加,或者单调减小,它取决于如何在内部区定义"将来"和"过去". 如果把 r 增加的方向定义为将来光锥,那么内部区的物质只能向外运动而穿出引力半径球面. 这种情形叫作白洞. 如果把 r 减小的方向定义为将来光锥,那么外部区的物质一旦穿入内部,它只能落向引力中心. 停止或返回都是不可能的. 这种情形叫作黑洞.

现在我们已看到,引力半径球面虽不是奇异面,但它是两个物理性质很不同的时空区的界面. 按现在的术语,它们分别叫作白洞或黑洞的视界.

§7.3 爱丁顿(Eddington)坐标

上面已说明,视界面上度规的奇异性是席瓦西尔时间坐标选用不当而带来的弊病. 因此,人们曾致力于寻找更适当的坐标以消除弊病. 爱丁顿坐标就是一种能部分地消除这弊病的坐标,它是爱丁顿在 20 年代引入的,而芬克尔斯坦(Finkelstein)在 50 年代末对它进行了深入的研究.

当光子向内落时,席瓦西尔时间坐标的弊病表现在 $r\to 2GM$ 时,

$$t=-r-2GM\ln\left(\frac{r}{2GM}-1\right)\to\infty, \qquad (7.3.1)$$

作一坐标变换把 t 换成 $\tilde{t}$,r 不变:

$$\tilde{t} = t + 2GM \ln\left|\frac{r}{2GM} - 1\right|, \tag{7.3.2}$$
$$\tilde{r} = r.$$

这样下落穿过视界时的坐标弊病就会消除，因现在 $\tilde{r} = r = 2GM$ 时，$\tilde{t}$ 必定是有限的（参看（7.2.5）至（7.2.8）式）. 为看清新坐标下度规与光锥线的结构，我们写出相应的不变距离公式，为书写方便，仍用 t 和 r 表示新坐标，省略了上面的波纹号，

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)dr^2 \\ &+ \frac{4GM}{r}drdt + r^2d\Omega^2, \end{aligned} \tag{7.3.3}$$

其中 $d\Omega^2$ 是立体角元，不细写出. 由 $ds^2 = 0$ 和 $d\Omega^2 = 0$ 得出径向运动的光锥线方程：

$$\frac{dr}{dt} = -1, \tag{7.3.4}$$

$$\frac{dr}{dt} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\Big/\left(1 + \frac{2GM}{r}\right). \tag{7.3.5}$$

由（7.3.4）解出一组光锥线

$$t + r = V. \tag{7.3.6}$$

由（7.3.5）式解出另一组光锥线

$$t - r - 4GM \ln\left|1 - \frac{r}{2GM}\right| = U. \tag{7.3.7}$$

这两组光锥线示于图 7.3. 从图线看出，用新坐标讨论外部粒子下落穿过视界面的运动已没有任何弊病出现，即在坐标时 t 为有限值时粒子穿过了视界. 然后再看内部区的光锥结构. 现在光锥内的两种取向仍与坐标时 t 的正负向一致，因而将来与过去的概念自然地获得了明确的定义. 从向上的将来光锥看，t 的增加必定伴随 r 的减小，即新坐标在内部区正确地描述了黑洞的行为. 对于 r 增加的运动，新坐标仍具有弊病. 如果我们用它描述白洞，那么内部区的将来方向就是 t 减少的方向，而且内部物质必须在 $t \to -\infty$ 时

才能逼近视界而不能描述穿出视界的过程. 因此这组新坐标被称为爱丁顿内行坐标. 人们常用它讨论物体下落而进入视界的运动，这一点用席瓦西尔坐标是不成的. 但是这组坐标仍不能描述白洞的物质发射过程.

若需要讨论物体从内部区向外穿过视界的运动，可以类似地引入爱丁顿外行坐标

$$\tilde{t} = t - 2GM \ln\left|\frac{r}{2GM} - 1\right|,$$

$$\tilde{r} = r. \tag{7.3.8}$$

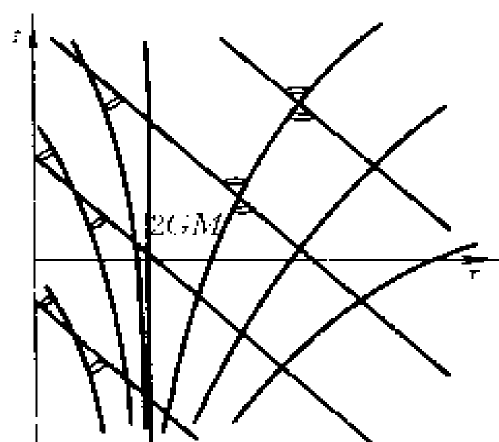


图 7.3 爱丁顿内行坐标下的光锥

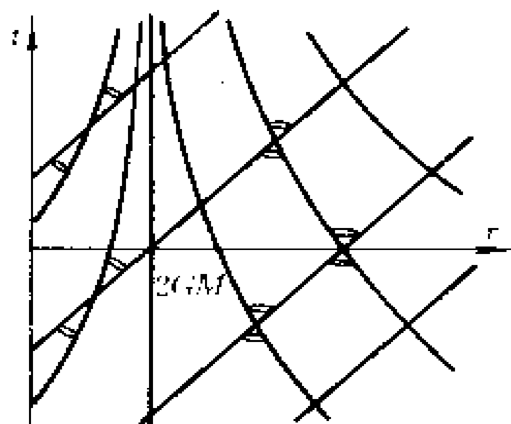


图 7.4 爱丁顿外行坐标下的光锥

外行坐标下的不变距离公式为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 + \frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}r^2 - \frac{4GM}{r}\mathrm{d}r\mathrm{d}t + r^2\mathrm{d}\Omega^2. \tag{7.3.9}$$

由此导出径向的光锥线方程，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 1, \tag{7.3.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\Big/\left(1 + \frac{2GM}{r}\right). \tag{7.3.11}$$

得出相应的光锥线解是

$$t - r = U, \tag{7.3.12}$$

$$t + r + 4GM \ln\left|1 - \frac{r}{2GM}\right| = V. \tag{7.3.13}$$

外行坐标下的光锥结构画于图 7.4. 作完全类似的讨论看出，这坐标对处理内部粒子向外穿过视界的运动已没有弊病. 但却不能处理外部粒子向内穿过视界的运动.

总之，采用爱丁顿内行或外行坐标，坐标系在视界面上的弊病将部分地被消除. 值得强调，视界面内外时空性质的不同，即外部是可能运动的双向区而内部是可能运动的单向区，这并没有因坐标的改变而改变. 也就是说，视界内部的特殊性是时空所固有的，而不是选用某一种坐标系的后果.

§7.4 克鲁斯卡(Kruskal)坐标

60 年代初，克鲁斯卡和采克莱斯(Szekeres)独立地建立了一组能完全消除视界面的弊病的坐标系，我们叫它克鲁斯卡坐标.

克鲁斯卡坐标记为(v,u,θ,φ)，即角坐标 θ 和 φ 与席瓦西尔角坐标一致，而用 v 和 u 代替席瓦西尔的时间坐标 t 和径向坐标 r. u,v 与 r,t 的关系定义为

当 $r>2GM$ 时，

$$u = \pm\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\frac{t}{4GM}, \tag{7.4.1}$$

$$v = \pm\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\frac{t}{4GM}; \tag{7.4.2}$$

当 $r<2GM$ 时，

$$u = \pm\left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\frac{t}{4GM}, \tag{7.4.3}$$

$$v = \pm\left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\frac{t}{4GM}. \tag{7.4.4}$$

经这坐标变换后，时空不变距离公式变成

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r}e^{-r/2GM}(-dv^2 + du^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

(7.4.5)

其中 r 作为 v 和 u 的函数由下式隐示

$$\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)e^{r/2GM} = u^2 - v^2. \tag{7.4.6}$$

由(7.4.5)式看出，克鲁斯卡坐标中的度规张量在视界面上没有奇异性. 它正是设计这组坐标时期望的目标. 这组坐标还有一些特征也是值得注意的：

(a)满足 $ds^2=0$ 的光锥线的方程是

$$\frac{du}{dv} = \pm 1. \tag{7.4.7}$$

它是与 u,v 轴成 45°角的两个直线族.

(b)由(7.4.6)式看到，$r=$常数被表示成一对双曲线

$$u^2 - v^2 = 常数. \tag{7.4.8}$$

特别是视界面 $r=2GM$，它变成了一对直线

$$u = \pm v. \tag{7.4.9}$$

这对直线把 u,v 平面分成四片(图 7.5). 第 I 和 III 片上 $u^2>v^2$，即 $r>2GM$，它是视界外部区. 第 II 和 IV 片上 $u^2<v^2$，即 $r<2GM$，它是视界内部区. 引力中心 $r=0$ 表现为

$$v^2 - u^2 = 1,$$

是一对上下的双曲线. 这对双曲线之外的区域对应 $r<0$，因而是非物理的.

(c)由克鲁斯卡坐标变换的定义式导出，

$$\tanh\frac{t}{4GM} = \frac{v}{u}, \quad 当\ r > 2GM, \tag{7.4.10}$$

$$\tanh\frac{t}{4GM} = \frac{u}{v}, \quad 当\ r < 2GM. \tag{7.4.11}$$

等 t 面是一族由原点出发具有任意斜率的直线族. 当 $u=v$，有

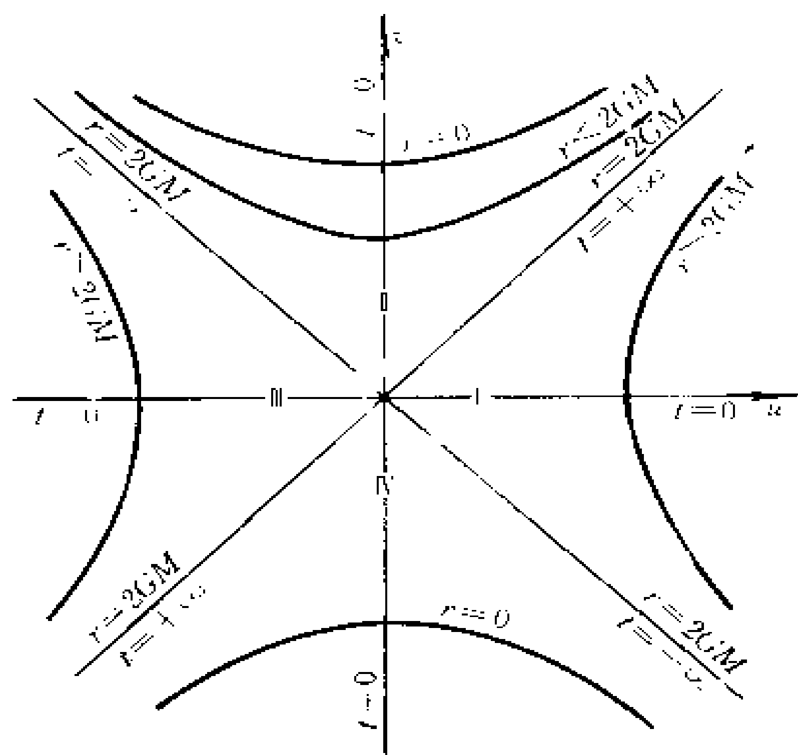


图 7.5　克鲁斯卡坐标

$t=\infty$；$u=-v$，有 $t=-\infty$. 注意这对直线恰好与视界重合. 它反映了 §7.1 中的结果：当达到视界，席瓦西尔时间坐标 t 将是无穷大. $u=0$ 的直线在 Ⅱ 和 Ⅳ 区，因而代表 $t=0$；$v=0$ 的直线在 Ⅰ 和 Ⅲ 区，因而也代表 $t=0$.

因为在采用克鲁斯卡坐标后，弊病的奇异性消失了，所以我们可以用它讨论球对称时空的全局结构. 我们把这一讨论推到下一节，而在这里补充说明一下这组坐标的设计思想. 注意克鲁斯卡坐标变换式作为定义，它并不需要有推导.

爱丁顿内行坐标变换(7.3.2)的动机是把内行光锥线(7.2.7)展成直线，即

$$\tilde{t}+\tilde{r}=V, \tag{7.4.12}$$

从而克服了质点内行过视界时的弊病. 同样，他的外行坐标变换

(7.3.8)是要把外行光锥线(7.2.8)展成直线,即

$$\tilde{t}-\tilde{r}=U. \tag{7.4.13}$$

从而克服质点外行过视界时的弊病. 那么是否有可能同时利用这两组变换,以使内行和外行光锥线都展成直线呢?我们试着把两组光锥线的编号参量 V 和 U 当新坐标,利用(7.2.7)和(7.2.8)式把变换定义为

$$V=t+r^{*}, \tag{7.2.7}$$

$$U=t-r^{*}. \tag{7.2.8}$$

其中 r^{*} 仍由(7.2.6)定义. 这样,

$$\mathrm{d}V\mathrm{d}U=\mathrm{d}t^{2}-\mathrm{d}r^{*2}=\mathrm{d}t^{2}-\mathrm{d}r^{2}\Big/\left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{2}.$$

于是席瓦西尔不变距离公式变为

$$\mathrm{d}s^{2}=-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\mathrm{d}V\mathrm{d}U+r^{2}(\mathrm{d}\theta^{2}+\sin^{2}\theta\mathrm{d}\varphi^{2}), \tag{7.4.14}$$

其中 r 是 U 和 V 的函数,由(7.2.7)和(7.2.8)式的逆变换决定. 由(7.4.14)立即看出,视界面上的奇异性没有消除,即预想的目的没有达到. 可是(7.4.14)式也暗示了消除这种奇异性的途径. 若对光锥线重新编号,即引入 $\tilde{U}$ 和 $\tilde{V}$ 代替 U 和 V,让

$$\tilde{V}=\tilde{V}(V),\tilde{U}=\tilde{U}(U), \tag{7.4.15}$$

不变距离公式(7.4.14)中与角度无关的部分将跟着变为

$$\mathrm{d}s^{2}=-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\tilde{V}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tilde{U}}\mathrm{d}\tilde{V}\mathrm{d}\tilde{U}. \tag{7.4.16}$$

函数 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{U}$ 的形状是任意的. 适当选取它,以使

$$\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\tilde{V}}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\tilde{U}}$$

不出现病态的奇异性,我们的目的就达到了. 例如选取

$$\tilde{V}=\mathrm{e}^{V/4GM}=\left(\frac{r}{2GM}-1\right)^{1/2}\mathrm{e}^{r/4GM}\mathrm{e}^{t/4GM}, \tag{7.4.17}$$

$$\tilde{U} = -e^{-U/4GM} = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} e^{-t/4GM}.$$

(7.4.16)相应变成

$$ds^2 = -\frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} d\tilde{V} d\tilde{U}, \tag{7.4.18}$$

视界面 $r=2GM$ 上的奇异性不再存在. 注意 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{U}$ 为常数的坐标线是光锥线，即光子的世界线. 为了更符合习惯，我们引入新的时间坐标 v 和新的径向坐标 u，趁机要求光锥线为与坐标线成 45°角的直线，为此定义

$$v \equiv \frac{1}{2}(\tilde{V} + \tilde{U}) = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh \frac{t}{4GM},$$

$$u \equiv \frac{1}{2}(\tilde{V} - \tilde{U}) = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh \frac{t}{4GM}. \tag{7.4.19}$$

(7.4.18)又改为

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM}(-dv^2 + du^2). \tag{7.4.20}$$

这正与(7.4.5)式相符合. 可是(7.4.17)和(7.4.19)必竟还有缺点，当 $r<2GM$，坐标成了虚数. 经反复尝试，人们已发现在 $r<2GM$ 的区域内把定义(7.4.19)修改为

$$\begin{aligned} u &= \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh \frac{t}{4GM}, \\ v &= \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh \frac{t}{4GM}, \end{aligned} \tag{7.4.21}$$

则兼顾了各方面的合理性. 而这就是本节开始引入的克鲁斯卡坐标变换.

§7.5 球对称时空的全局结构

有了不含弊病的克鲁斯卡坐标，我们就有可能在球对称时空

中讨论任何物理上可实现的运动，并无限地追究它的过去和将来. 唯一妨碍这种追究的点只有 $r=0$，它是一个物理的奇点.

讨论前应注意，席瓦西尔坐标中由 t 和 r 标志的一个点在克鲁斯卡的 u,v 坐标面上对应有两个点. 当 $r>2GM$，一个对应点在第 Ⅰ 片，另一个在第 Ⅲ 片. 当 $r<2GM$，一个对应点在第 Ⅱ 片，另一个在第 Ⅳ 片. 我们暂时忘掉第 Ⅲ 片，而把第 Ⅰ 片当作视界之外的物理世界. 这一片覆盖了 $2GM<r<\infty$ 和 $-\infty<t<+\infty$，它对现实区域的物理描绘是充分的(第 Ⅲ 片也一样).

考虑粒子在第 Ⅰ 片内的任意运动. 设质点瞬时处于 A(见图 7.6). 它的运动方向必在将来光锥之内. 这坐标下的光锥线与纵横坐标成 45°角，因此容易看清，它的席瓦西尔时间 t 必定增加，而 r 则可以增加也可以减小. 这正是我们最熟悉的正常时空性质. 质点的将来可以永远处于第 Ⅰ 片，但也可能越出第 Ⅰ 片. 因四片的分界线也是 45°线，所以质点沿它的将来光锥方向达到 Ⅰ 与 Ⅲ 或 Ⅳ 的界面是不可能的. 唯一的可能是达到 Ⅰ 与 Ⅱ 的界面(如图 7.6 中 B 点). 达到界面的席瓦西尔时间 t 是无穷大，但克鲁斯卡时间 v 是有限的. 一旦达到界面，将来光锥的方向决定它不可能再返回第 Ⅰ 片. 它必须进入第 Ⅱ 片. 第 Ⅱ 片的等 r 线在光锥之外，这表明进入了第 Ⅱ 片的质点不可能停留. 它只能不断减小 r，直至达到奇点 $r=0$(如图 7.6 中 D 点). 这分析说明第 Ⅰ 片是内行的单向区，它描述黑洞内部的时空.

那么第 Ⅱ 片加第 Ⅰ 片是否覆盖了全部物理时空呢？回答是否定的. 如无限追究粒子的将来，它已完备了. 如追究粒子的过去，它可能来自第 Ⅰ 片和第 Ⅳ 片的界面，例如图上的 E 处. 再往前追溯，它只可能来自第 Ⅳ 片的内部. 第 Ⅳ 片内的等 r 线也在光锥之外，即粒子不能静止，物理的运动必定增加它的 r. 这说明如果第 Ⅰ 片中有来自第 Ⅳ 片的粒子，它必定来自第 Ⅳ 片中的物理奇点 $r=0$(如图 G 点). 这就是白洞的喷射. 第 Ⅳ 片描述的是白洞内部的时空.

现在让我们注意第 Ⅲ 片. 如果存在白洞喷射，那么从奇点发生

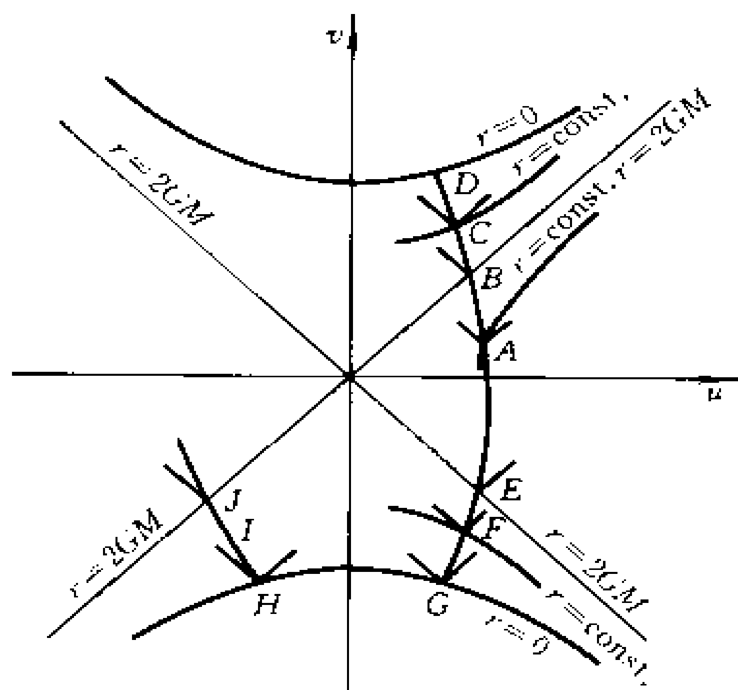


图 7.6 克鲁斯卡坐标面上质点的运动

的粒子可能通过 $G—F—E$ 进入第Ⅰ片，也可能通过 $H—I—J$ 进入第Ⅲ片. 第Ⅲ片与第Ⅰ片不可能有物质交流，如果把第Ⅰ片当作"我们的"外部区，第Ⅲ片就是一个与我们隔绝的另一个外部区. 它的时空性质与我们的一样，只不过它的席瓦西尔时间是第Ⅰ片的席瓦西尔时间的反演. 第Ⅲ片中的粒子也可能达到它与第Ⅱ区的边界而进入黑洞，并最终落入物理奇点 $r=0$. 在进入黑洞后，落入奇点前，它也可能与来自第Ⅰ片的粒子相遇. 但是，它们所交流的信息是送不回第Ⅰ片或第Ⅲ片的. 因此，这两片是完全隔绝的.

上面分析的是球对称时空结构的最一般的可能性. 即使理论完全正确，那么理论上允许黑洞与白洞的存在与自然界是否实际有黑洞或白洞存在还是两回事. 实际的存在与否只能靠实践来回答. 但也值得反过来强调，它们的存在原则上是可能的.

§7.6 黑洞作为恒星演化的终局

近 20 年来，某种程度上是由于中子星的发现的促进，人们对黑洞进行了广泛的研究. 这种研究是多方面的. 一种是对黑洞的物理和数学性质的纯理论研究，另一种是结合天体物理过程探讨黑洞的形成机制和黑洞存在的效应，再一种是从观测上寻找黑洞. 本节将以后两方面研究为背景讨论黑洞的现实性问题，而把黑洞物理理论方面的若干重要结果放在后面几节.

在天体演化中可能形成黑洞的机制很多. 人们一般认为今天尚能存在的黑洞有三种现实的形成机制. 第一种是早期宇宙高密介质中由于密度涨落而造成的小黑洞. 估计这种黑洞的质量大约只有 10^{12} kg. 第二种是作为正常恒星演化至晚期的一种可能的终局. 这种黑洞应该是几个至几十个太阳质量的大小. 第三种是超重星，星团或星系核塌缩形成的巨型黑洞. 它的质量是 $10^4 \sim 10^9$ 太阳质量的量级. 我们这里仅讨论黑洞作为恒星演化的可能终局问题.

我们知道，普通恒星是以内部有核反应作能源为标志的. 这能源维持了星体内的温度梯度和压力梯度，而后者抵挡了星体的自引力，实现了力学平衡. 核燃烧阶段的时间终究是有限的. 使我们感兴趣的是：核燃烧停止后，恒星的命运是什么.

恒星演化理论告诉我们，质量小于约八倍太阳质量的恒星并不能充分烧尽它中心部分的核燃料，最后由于温度不够，核反应中止了. 中止后的结局是形成白矮星，它是由高密等离子体构成的（密度约为 $10^9 \sim 10^{12}$ kg · m^{-3}）. 即使它的温度降得很低，简并电子气体的费米(Fermi)压力也足以维持与引力的平衡. 电子简并压力能承受的最大质量叫昌德拉锡卡(Chandrasekhar)极限，约为 1.4 倍的太阳质量. 这类恒星在晚期会丢失自己的部分或大部分质量，从而形成一颗质量小于昌德拉锡卡极限的白矮星.

质量大于约八倍太阳质量的恒星将演化到核心部分的核燃料完全耗尽，从而形成一个由不能进行放能反应的铁、钴、镍原子核构成的星核. 开始星核的密度约为 10^{12} kg · m^{-3}，温度约为 10^{9} K. 星核物质处于等离子态，靠简并电子压力继续维持与引力的平衡. 当星核外围的核燃烧使铁星核质量积累而超过了 1.4 倍太阳质量，星核的自引力超过了压力差，于是星核物质将因引力而向中心猛烈收缩，这叫引力塌缩. 这时发生了我们感兴趣的问题：星核的引力塌缩会不会形成黑洞?

塌缩时密度的加大导致了物态的变化. 在密度 $\rho \geqslant 10^{12}$ kg · m^{-3}时，等离子体中电子的费米能已足够高，以至它与原子核中的质子相撞而能把质子变为中子，这叫反 β 衰变



$$e^- + p \rightarrow n + \nu_e.$$

星核物质中的原子核开始富中子化. 中子占比例过大造成原子核的不稳定. 当塌缩到 $\rho = 4 \times 10^{14}$ kg · m^{-3}时，过剩中子将从原子核中游离出来，叫中子滴出. 当 $\rho = 4 \times 10^{17}$ kg · m^{-3}时，介质中原子核已全部瓦解，而成为中子气体了. 中子与电子一样是服从泡里(Pauli)原理的粒子，因此高密态下也有简并压力. 中子气的简并压能承受 2～3 倍太阳质量的自引力(这质量值叫奥本海默极限). 注意塌缩星核的质量仅略大于 1.4 倍太阳质量，因此达到适当的密度时，引力塌缩将被中子气的简并压阻挡，从而重新形成一稳定的星体，它就是中子星.

那么质量很大的星壳的结局是什么呢?流行的观点是这样的. 星核塌缩至超过中子星密度后将发生反弹，反弹引起的冲击波外传至星壳，将加热星壳而使其核燃料全部点火，从而发生爆炸，这就成为超新星爆发. 星壳物质在爆炸时将被炸散，这样星核最终只保持一个小的质量而构成中子星. 但是这种看法还远不是一个肯定的结论. 从理论上讲，有的模型计算表明星壳的结局与上述看法相符，有的模型计算则说冲击波不足以引起外壳的爆炸. 主要的是，如果小部分星壳物质最终会下落到星核上，那么星核质量就会

超过奥本海默极限，从而使它不可能作为中子星存在．当它继续塌缩使密度再增大一个量级左右，它就变成黑洞了．从观测上讲，如果每一次重星星核的引力塌缩都形成一个中子星，那么银河系中中子星的数目应远比实际观测到的要多．这些迹象使人们相信，黑洞的形成也是星核塌缩的可能结局之一．但是，关于星壳结局的争议一直持续至今．

孤立黑洞的形成过程或存在都是很难被观测到的．寻找黑洞的可行途径之一是利用密近双星．如果一个黑洞和一个正常恒星构成密近双星，那就会有较多的可观测效应来判明其中黑洞的存在．被很多天文和天体物理学家看作黑洞的 CygX-1 就是密近双星的一员，其主星 HDE226868 是质量约为 20 倍太阳质量的 B 型超巨星．这双星的周期为 5.6 天，表明了它们的密近．CygX-1 是发射 X 射线的暗天体，它的质量被确定为大于 5.5 倍太阳质量．一个致密星的质量显著地超过奥本海默极限，这就构成了它被证认为黑洞的重要因素．此外对 CygX-1 的总光度和光变时间的测量也支持这种证认．所以许多天体物理学家相信它应当是一个黑洞．由于这种证认带有不确切性，所以争论依然存在．同时，人们正通过其他途径努力寻找黑洞．

§7.7　黑洞的分类

上面各节针对球对称源的引力场讨论了黑洞的概念．这种黑洞叫席瓦西尔黑洞．60 年代末以来，黑洞理论有了很大的发展．这一节我们来讨论黑洞的分类问题．

在广义相对论建立后不久，除席瓦西尔解之外，莱斯纳（Reissner）和诺斯特隆（Nordstrom）得出过另一类球对称解，相应的不变距离公式是

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2$$

$$+r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{7.7.1}$$

其中 M 是引力源的质量，Q 是引力源的电荷. 因此(7.7.1)式描述的是荷电引力源的引力场. 引力源的电荷会影响引力场可这样理解. 电荷周围必伴随有电场，电场具有能量，亦即具有质量，因此它也将产生引力.

60 年代初开始有人研究了这种引力场的全局结构，并弄清了它也可能构成黑洞. 我们仍把黑洞的视界定义为单向运动时空区的边界，即单向膜. 那么莱斯纳黑洞的外视界坐标为

$$r_+ = GM + \sqrt{G^2M^2 - GQ^2}, \tag{7.7.2}$$

而视界存在的条件是 $G^2M^2 \geqslant GQ^2$，即荷电量过大的引力源不能形成黑洞.

接着克尔(Kerr)找到了真空场方程的一个轴对称解，它的不变距离公式可写作

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}(dt - a\sin^2\theta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}[(r^2 + a^2)d\varphi - adt]^2$$

$$+\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \tag{7.7.3}$$

其中

$$\Delta \equiv r^2 - 2GMr + a^2, \tag{7.7.4}$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{7.7.5}$$

M 代表质量，a 叫比角动量，即单位质量的角动量. 克尔度规(7.7.3)描述的是转动引力源的引力场. 如果这种转动引力源的线度能充分缩小，它也将形成黑洞. 这种黑洞叫克尔黑洞. 克尔黑洞的外视界面坐标为

$$r_+ = GM + \sqrt{G^2M^2 - a^2}, \tag{7.7.6}$$

视界面存在的条件是 $G^2M^2 \geqslant a^2$. 这就是说黑洞不能转得太快.

在弄清上述几种具体的黑洞后，人们对黑洞分几类很感兴趣. 通过几年的研究，于 70 年代初解决了分类问题. 我们分三个层次来表述这个结果.

(a)人们首先证明了稳定的黑洞必定是轴对称的.

(b)一般的稳定黑洞的引力场只包含三个物理参量,它们可采用质量 M,电荷 Q 和比角动量 a.

(c)一般的稳定黑洞的引力场由克尔-纽曼(Kerr-Newman)度规描述.不变距离公式仍具有(7.7.3)式的形式,但代替(7.7.4)式的是

$$\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 + GQ^2. \qquad (7.7.7)$$

这种一般的稳定黑洞被称作克尔-纽曼黑洞.与前面讨论过的黑洞相比可看出,当 $Q=0$ 它还原为转动的克尔黑洞;当 $a=0$ 它还原为荷电的莱斯纳黑洞;如果 $a=Q=0$,它就是既不转动又不荷电的席瓦西尔黑洞.因此 a 和 Q 都不为零的克尔-纽曼黑洞是转动而又荷电的黑洞.

§7.8 黑洞动力学

黑洞理论的另一个有趣的结果被称为黑洞的动力学规律,它是伯肯斯坦(Berkenstein)和霍金(Hawking)等人在 1972 至 1973 年间得出的.其中最重要的是关于黑洞过程不可逆性的黑洞动力学第二定律.

最一般的克尔-纽曼黑洞的视界位于

$$r_+ = GM + \sqrt{G^2M^2 - GQ^2 - a^2}, \qquad (7.8.1)$$

因而视界面的面积是

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2). \qquad (7.8.2)$$

霍金证明了一条定理,它说黑洞动力学过程中视界的总面积不能减少.这就是黑洞动力学第二定律,也叫面积不减定理.

看两个质量为 M_1 和 M_2 的席瓦西尔黑洞的合并.合并后的质量为 $M=M_1+M_2$.设稳定后仍是席瓦西尔黑洞,则它的视界坐标为

$$r = 2GM = 2G(M_1 + M_2) = r_1 + r_2.$$

席瓦西尔黑洞的视界面积 $A=4\pi r^2$，因而有

$$A_1 + A_2 < A.$$

按面积不减定理，这过程是可能的. 相反的过程，即一个席瓦西尔黑洞分裂成两个则是不可能的.

按面积不减定理，黑洞过程保持视界总面积不变是可能的，这种动力学过程被称为可逆的黑洞过程. 视界面积增加的过程则是不可逆的黑洞过程. 这一切在形式上与热力学第二定律非常类似. 现在讨论它的一个重要推论.

定义

$$m_{ir} = \frac{1}{G}\left(\frac{A}{16\pi}\right)^{1/2} \tag{7.8.3}$$

为黑洞的不可约质量，意指它在黑洞动力学过程中是不可减少的. 把(7.8.3)式代入(7.8.2)式，则(7.8.1)式可改写为

$$M^2 = \left(m_{ir} + \frac{Q^2}{4Gm_{ir}}\right)^2 + \frac{J^2}{4G^2 m_{ir}^2}. \tag{7.8.4}$$

其中 $J=aM$ 是黑洞的角动量. 从(7.8.4)式看出，如果用可逆黑洞过程使它的电荷 Q 或角动量 J 减少，那么黑洞的质量也将减少. 这也就是说原则上可以用动力学方法从荷电的或转动的黑洞提取能量，相应地黑洞将减少电量或减慢转动. 当黑洞的电荷和角动量都减至零，即成了席瓦西尔黑洞，(7.8.4)式说明再向黑洞提取能量已不可能了. 在这意义上，人们也把席瓦西尔黑洞叫黑洞的基态或死亡了的黑洞.

§7.9 黑洞的辐射

伯肯斯坦曾进一步证明，黑洞的视界面积 A 正是热力学意义下的熵. 他得出黑洞的熵 S 与视界面积的关系为

$$S = \frac{k}{4\hbar G}A, \tag{7.9.1}$$

其中 $\hbar$ 是普朗克(Planck)常数，k 是玻耳兹曼(Boltzmann)常数．我们取黑洞的熵 S，角动量 J 和电荷 Q 作为热力学态变量，那么黑洞能量(即质量)变化与态变量变化的热力学关系为

$$dM = TdS + \Omega dJ + VdQ, \tag{7.9.2}$$

其中 T 是黑洞的温度，Ω 和 V 是相应的广义力，它们的热力学函数形式可由(7.8.4)式导出．

为导出黑洞温度 T 对参量 M，J 和 Q 的依赖关系，把(7.8.4)式重写作

$$M^2 = \frac{\hbar}{4\pi kG}S + \left(\frac{Q^2}{4} + J^2\right)\frac{\pi k}{G\hbar}\frac{1}{S} + \frac{Q^2}{2G}. \tag{7.9.3}$$

由(7.9.2)式和(7.9.3)式，得到

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{J,Q} = \frac{\hbar}{8\pi kG}\frac{1}{M} - \left(\frac{Q^2}{4} + J^2\right)\frac{\pi k}{2G\hbar}\frac{1}{MS^2}. \tag{7.9.4}$$

这就是黑洞的温度公式．

现在讨论席瓦西尔黑洞．在(7.9.4)式中令 $Q=J=0$，即知席瓦西尔黑洞的温度与质量成反比，

$$T = \frac{\hbar}{8\pi kG}\frac{1}{M}. \tag{7.9.5}$$

§7.6 中已指出，有三种不同质量的黑洞可能是现实的，一种是 10^{12} kg 左右的小黑洞，一种是 10^{31} kg 左右的恒星量级的黑洞，再一种是 10^{39}kg 量级的巨黑洞，用(7.9.5)式算出它们的温度分别为 10^{11} K，10^{-8} K 和 10^{-16} K．引人注意的是小黑洞的温度远高于它的环境温度，因此它必定向环境放出热辐射．考虑到黑洞有热辐射，这又给黑洞物理学引伸出一系列的新问题．

首先，黑洞的辐射机制是什么？1974 年霍金指出，黑洞的辐射可以通过量子效应来实现．黑洞表面附近的真空涨落产生虚粒子对，当其中负能虚粒子通过隧道效应而进入黑洞，黑洞的能量将减少，同时其中的正能粒子可能向外穿出黑洞的外引力区，这相当于黑洞辐射了一个粒子(图 7.7)．这种机制被称作霍金辐射．

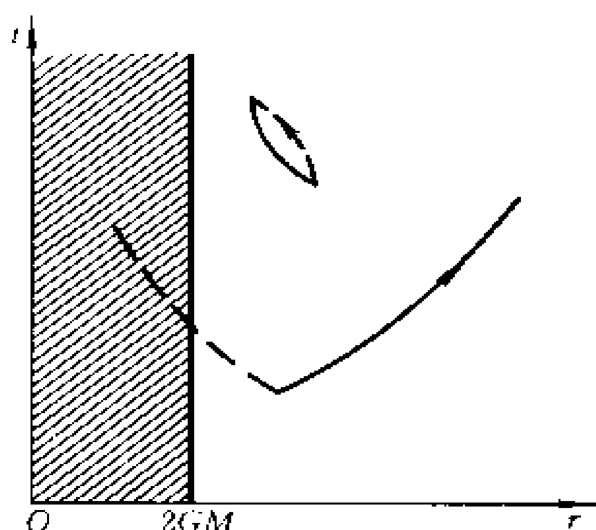


图 7.7 霍金辐射

其次，黑洞在热力学上是不稳定的．由于黑洞的能量和质量反比于温度，它是一个负热容系统，

$$C = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}T} = -\frac{8\pi kG}{\hbar}M^2. \qquad (7.9.6)$$

若黑洞温度高于环境温度，它将通过辐射而放出能量．热容为负说明放出能量后温度升高，因此它们不会有热平衡．黑洞辐射将维持到能量耗尽为止．这样我们可以计算温度高于环境温度的黑洞的寿命．按黑体辐射公式，黑洞的物质辐射率为

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\sigma AT^4 = -\frac{2\sigma\hbar^4}{(8\pi)^3k^4G^2}\frac{1}{M^2}, \qquad (7.9.7)$$

其中 σ 是斯忒藩-玻耳兹曼(Stefan-Boltzman)常数，A 是黑洞视界面积．容易从(7.9.7)式积出初始质量为 M_0 的黑洞的寿命

$$t = 8.4 \times 10^{-17}M_0^3, \qquad (7.9.8)$$

其中 M_0 以 kg 为单位，t 以 s 为单位．质量为 10^{11} kg 的小黑洞的寿命算出为 10^{17}s，它小于宇宙的年龄(参看第八章)．因此，宇宙演化早期由于密度涨落而形成的很小的黑洞必须通过非热过程吸积周围的物质，使自己的质量超过 10^{12} kg，它才能够存活到今天．否

则，由于热辐射它已经消失了．至于那些与恒星质量量级相当的或更大的黑洞，由于它们的温度低于环境温度，它们将从环境吸收能量而进一步降低自己的温度．因为实际宇宙环境的温度很低，所以这种热过程对它们是不重要的．

第八章　宇　宙　学

广义相对论需要有有实际意义的应用领域，宇宙学无疑是其中最重要的一个．反过来，宇宙学也必须靠广义相对论才能发展．正如爱因斯坦曾说："在我看来，不利用广义相对论，人们不可能从理论上得到任何宇宙学上的可信的结果．"以广义相对论为基础的现代宇宙学理论框架确立于 20 年代．它为赢得人们的信任花了 40 年．此后，宇宙学开始了它的迅猛的发展，并成了广义相对论的重要支柱之一．

§8.1　宇宙学的基本事实

宇宙是指自然界的一切物质的总和．这是自然科学的最大客体．如果我们要把它当物理对象来研究，必须先对它具备一定的感性知识．

我们的地球在宇宙中只是一个十分渺小的局部，因此地球上的物体没有宇宙学意义．天球上的无数光点才是宇宙的表观形象．可是，当我们不能分辨这些光点的远近差别时，这只是一个二维形象．想获得它的三维立体形象，天文学家须有能力测定各个光点距我们的远近．这种能力主要是从本世纪开始才逐渐具备的．

随着天文测距能力的提高，人们获得的第一个重要信息是恒星在宇宙中的分布并不均匀，它们具有明显的结团性．我们太阳周围约 20 kpc（pc 称为秒差距，$1pc=3.1\times10^{16}$ m）的范围内，集积有大约一千亿个恒星．这恒星集团就是银河系．除银河系成员之外，天穹上还有大量光点并不是恒星，而是类似于银河系的巨大恒

星集团.它们被统称为星系.它们与我们的距离远超过银河系的大小,因此它们表观上也只是一个个的光点.

星系在宇宙空间的分布也并不很均匀.由于引力作用,它们也有弱的结团性.这就是天文上的星系团和超星系团的概念.但是,当我们把空间的单位体积取得比超星系团还大,计数测量表明,空间各处的星系数密度是接近均匀的.

从理论上研究宇宙,如同研究其他对象一样,一方面须抓住其本质特征,另一方面须略去其次要性质.从这意义上,人们把宇宙看成一个充满全空间的各向同性的均匀介质.这是一个基本假设,被称为宇宙学原理.这样,透过表观的复杂性,我们看到了宇宙面貌的简单性.至于这假设在多大程度上反映了宇宙的本质特征,我们在后面将会讨论到.

除宇宙物质的均匀性外,宇宙的膨胀是又一个重要的基本事实.

20 年代,哈勃(Hubble)测定了若干星系的距离 R 和退行速度 V,发现有 V 与 R 成正比的经验规律,即

$$V = H \cdot R, \tag{8.1.1}$$

后人把比例系数 H 称哈勃常数.

当我们把宇宙看成由大量星系组成的均匀介质,远处的星系在系统地向远离我们的方向退行,表明了宇宙介质在膨胀.星系相对我们银河系有系统的退行可能带来错觉,好像我们处于宇宙的中心.其实用运动学容易证明,哈勃发现的经验规律是宇宙在膨胀中保持其均匀性的唯一方式.因此哈勃定律暗示,宇宙在演化过程中是始终均匀的.这样,我们的银河系不过是均匀宇宙介质中的一个普通的"分子",它不具有任何特殊地位.这概念被称作宇宙哥白尼原理.

哈勃常数的物理意义是描述宇宙整体上的膨胀快慢.近年人们用多种方法定出的值弥散在

$$H_0 = 50 \sim 100\ \mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}} \tag{8.1.2}$$

的范围内．这意味着每远 1Mpc，星系的退行速度增大 50 至 100 km/s. 利用 1Mpc＝3.1×10^{19} km，我们也能把它写成

$$H_0^{-1}=(3.1\sim6.2)\times10^{17}\ \text{s}=(0.98\sim1.96)\times10^{10}\ \text{a}. \tag{8.1.3}$$

它表明由于宇宙的膨胀，任两个星系间的距离每年约增大百亿分之一．

这里指出一点，因 H 是宇宙的整体参量，它与被观测对象的空间坐标无关，所以天文学家把它叫哈勃常数．后面从演化的角度将看到，宇宙膨胀的快慢是随时间变化的，即 $H=H(t)$. 因此人们更恰当地把它称作哈勃参量．宇宙学中习惯地对随时间变化的量加下标 0，代表它在今天的值．因此这里把今天的 H 值记作 H_0. 下面我们将对一切整体参量沿用这个记法．

§8.2 宇宙动力学

影响宇宙膨胀的作用力只有引力．如把宇宙看成充满全空间的均匀介质，那么介质中任一质元所受的引力是无法由牛顿引力定律算出的．因此，牛顿力学理论不能作为宇宙动力学的基础．这是宇宙动力学只能以广义相对论为基础的原因．

按广义相对论，均匀各向同性的介质将造成均匀各向同性的空间结构．可以证明，这种时空度规场的一般形式为

$$\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+R^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2}+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right), \tag{8.2.1}$$

其中 $R(t)$是时间的任意函数，k 是任意实常数．这里采用的空间坐标是随动坐标，即质元随宇宙膨胀而动时，它的空间坐标是不变的．从(8.2.1)看出，空间坐标固定的两点间的距离与 $R(t)$成正比．因此 $R(t)$被称作宇宙尺度因子．尺度因子随时间的变化反映了宇宙的膨胀进程．k 是宇宙空间的曲率因子．当 $k=0$，空间

是平坦的，几何是欧氏的．当 k 为正或为负，空间是弯曲的，几何是黎曼的．让我们注意一点，负曲率空间的总体积仍是无限的，而正曲率空间的总体积则是有限的．

均匀各向同性介质的能量动量张量有形式

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^{\mu}U^{\nu} + pg^{\mu\nu}, \tag{8.2.2}$$

其中 $U^{\mu}=(1,0,0,0)$，表示介质质元只随宇宙膨胀而运动，ρ 和 p 分别是介质的密度和压强，它们也都是均匀的，因而也都随时间 t 变化．

决定宇宙动力学行为的规律是爱因斯坦场方程．把(8.2.1)和(8.2.2)式代入

$$R_{\mu\nu} = - 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right), \tag{8.2.3}$$

得到时-时分量方程

$$3\ddot{R} = - 4\pi G(\rho + 3p)R, \tag{8.2.4}$$

和空-空分量方程

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)R^2. \tag{8.2.5}$$

其他分量方程都是恒等式．由(8.2.4)和(8.2.5)中消去 $\ddot{R}$，得到 R 的一阶微分方程

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2. \tag{8.2.6}$$

另外由能量动量张量满足 $T^{\mu\nu}_{;\nu}=0$，又可导出又一个微分方程

$$\frac{d\rho}{dt} = - 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + p). \tag{8.2.7}$$

这些方程中归根结底只有两个是独立的，但是却涉及三个未知函数 ρ，p 和 R，因而并不完备．若能由介质的性质再得出一个关系式

$$p = p(\rho), \tag{8.2.8}$$

我们就有了一组完备的动力学方程．由它可解出宇宙的膨胀进程

$R(t)$，以及膨胀中密度和压强 p 随时间的变化．

(8.2.7)式可等价地写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R}(\rho R^3) = -3pR^2, \tag{8.2.9}$$

如果介质是非相对论的，即介质粒子的热动能远小于静能，则有 $p \ll \rho$. 这种介质被称为实物．忽略热动能等于忽略压强，因此由(8.2.9)式解出

$$\rho_{实} R^3 = \mathrm{const.}, \tag{8.2.10}$$

实测表明今天的宇宙密度主要来自物质的静能，所以(8.2.10)式可用于处理较近期的宇宙膨胀过程．如果介质是相对论性的，即粒子热动能大于静能，则有 $p=\rho/3$. 这种介质统称为辐射．这时由(8.2.9)式解得

$$\rho_{辐} R^4 = \mathrm{const.}, \tag{8.2.11}$$

实测表明，今天的宇宙中辐射的总质量(即总能量除以光速平方)主要来自 3K 背景光子．它与实物之比为

$$\rho_{0辐}/\rho_{0实} \sim 10^{-4} \sim 10^{-5}. \tag{8.2.12}$$

对比(8.2.10)和(8.2.11)看出，

$$\rho_{辐}/\rho_{实} \propto R^{-1}, \tag{8.2.13}$$

它表明越往过去追溯，即 R 越小，辐射所占的比例越大．当追溯到

$$R/R_0 < 10^{-4} \sim 10^{-5}, \tag{8.2.14}$$

则会有 $\rho_{辐} > \rho_{实}$，即早期宇宙必曾是以辐射为主的．研究早期宇宙的膨胀过程时可用(8.2.11)式．这样，我们就基本上掌握了宇宙全过程的动力学规律．

§8.3 宇宙空间的曲率

理论上宇宙的曲率因子 k 可为正，可为负，也可为零．这意味着宇宙的总质量和总体积可能是有限的，也可能是无限的．但是

实际宇宙只有一个．它属于哪一种可能？这是一个只能由实践来回答的问题．k 难以直接测量，可是动力学方程把它与其他可观测量联系了起来．因此它可由其他量的测量来推断．

(a)曲率与宇宙密度

我们定义 $H=\dot{R}/R$ 来描述 t 时刻宇宙膨胀的速率．它在今天的值就是哈勃常数．基本方程(8.2.6)式可改写作

$$k=\left(\frac{8\pi G}{3}\rho-H^2\right)R^2=\frac{8\pi GR^2}{3}(\rho-\rho_c) \qquad (8.3.1)$$

其中

$$\rho_c\equiv 3H^2/8\pi G \qquad (8.3.2)$$

称作临界密度．它的值全由哈勃参量决定．用实测的 H_0 值算出今天的临界密度为

$$\rho_{c0}=(0.47\sim 1.88)\times 10^{-26}\ \mathrm{kg/m^3}. \qquad (8.3.3)$$

由(8.3.1)看出，k 的符号取决于实际密度 ρ 和临界密度 ρ_c 的相对大小．定义两者之比为 Ω，

$$\Omega\equiv\rho/\rho_c. \qquad (8.3.4)$$

我们以后将称它为宇宙学密度．k 的符号的判据可表述为

$$\begin{aligned}&若\ \Omega>1,\quad 则\ k>0,\\&若\ \Omega=1,\quad 则\ k=0,\\&若\ \Omega<1,\quad 则\ k<0.\end{aligned} \qquad (8.3.5)$$

使用这判据的困难在于宇宙实际密度的测定．

若宇宙中的物质主要地表现为发光的星系，那宇宙平均密度的测定相对不难．用 Ω 表示，结果是

$$\Omega_{光}=0.007. \qquad (8.3.6)$$

但是，天文测量已清楚表明，宇宙中不发光的暗物质的总量远远地超过发光物质的总量．暗物质问题作为专题，我们将在§8.12中讨论．现在限于指出一些结果．当以星系团为基本单元，测得的宇宙平均密度是

$$\Omega_{团}=0.2\pm 0.1. \qquad (8.3.7)$$

如果存在大量更弥漫地分布于全空间的稀薄气体，它们的质量在上述测量中是测不到的；只有宇宙学尺度的测量才能发现它们，并知道它的总量．现有的试探性测定表明，把一切计在内，宇宙总密度很可能显著地超过(8.3.7)所示．Ω 值接近或略超过 1 都是可能的．按已有的各种测量，我们只能得到一个范围，即

$$0.2 < \Omega_0 < 2. \tag{8.3.8}$$

由此看到，因对暗物质的总量知道得还不够清楚，目前还不能对宇宙曲率的正负性作出判断．

(b)曲率与减速参量

宇宙膨胀受引力影响而减速，因而 $H(t)$ 是下降的．通常用无量纲量

$$q = -\ddot{R}R/\dot{R}^2 \tag{8.3.9}$$

来描述膨胀的减速．它是一个正数．考虑到晚近期宇宙以实物为主，把 $p=0$ 代入(8.2.4)，并利用(8.2.6)，可导出

$$k = H^2R^2(2q-1). \tag{8.3.10}$$

这样我们又有了一个判断曲率的方法，即 $q_0=1/2$ 表明宇宙是平坦的，而 q_0 大于或小于 1/2 则分别表明宇宙是正曲率或负曲率的．

事实上，宇宙减速参数的测定也有重大困难．各种推断给出的范围是

$$q_0 = 1.0 \pm 0.8. \tag{8.3.11}$$

从实物为主宇宙的动力学方程能导出减速参量与宇宙学密度的关系为

$$2q = \Omega. \tag{8.3.12}$$

看来 q_0 的范围(8.3.11)与 Ω_0 的范围(8.3.8)是相洽的．但是从判断曲率的正负性的角度讲，问题的处境并没有改善．

值得指出，虽然我们今天还不能对宇宙的有限性或无限性作出判断，但上面的分析已清楚表明，这疑问的澄清是一个实测问

题．任何哲理的武断都是没有意义的．

§8.4 宇宙的年龄

现在我们从方程(8.2.6)和(8.2.10)来求解实物为主阶段的$R(t)$，以讨论宇宙的年龄问题．下一节中将说明，辐射为主的早期约持续几千年，它对长达百亿年的宇宙年龄没有重要贡献．

研究宇宙的方法是从它的现状追溯它的过去，因此今天的状况起着初条件的作用，它是可由实测定出的．方程(8.2.6)中的k不是直接可观测量，让我们把它化掉．先把这方程式用于今天，得出

$$H_0^2R_0^2=\frac{8\pi G}{3}\rho_0R_0^2-k, \tag{8.4.1}$$

再把(8.2.6)与(8.4.1)相减，以消掉k．整理后得到

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2=H_0^2\left(1-\Omega_0+\Omega_0\frac{R_0}{R}\right). \tag{8.4.2}$$

因R可以任意地归一，我们把R/R_0当一个宗量来处理．这宗量在今天的值是1．(8.4.2)式是它随时间变化的微分方程．

方程(8.4.2)易于解出．它是

$$t=H_0^{-1}\int_0^{R/R_0}\left(1-\Omega_0+\frac{\Omega_0}{x}\right)^{-1/2}\mathrm{d}x. \tag{8.4.3}$$

当把积分上限取为1，相应的时间就是宇宙年龄．由此看出，若实测定出了H_0和Ω_0，则宇宙年龄t_0可以算出．让我们讨论t_0对Ω_0的依赖关系．

(a) $\Omega_0=1$的情形

这时积出的$R(t)$是

$$\frac{R(t)}{R_0}=\left(\frac{3H_0t}{2}\right)^{2/3}, \tag{8.4.4}$$

相应的曲线示于图8.1．这情况下宇宙将永远膨胀．令$R/R_0=1$，

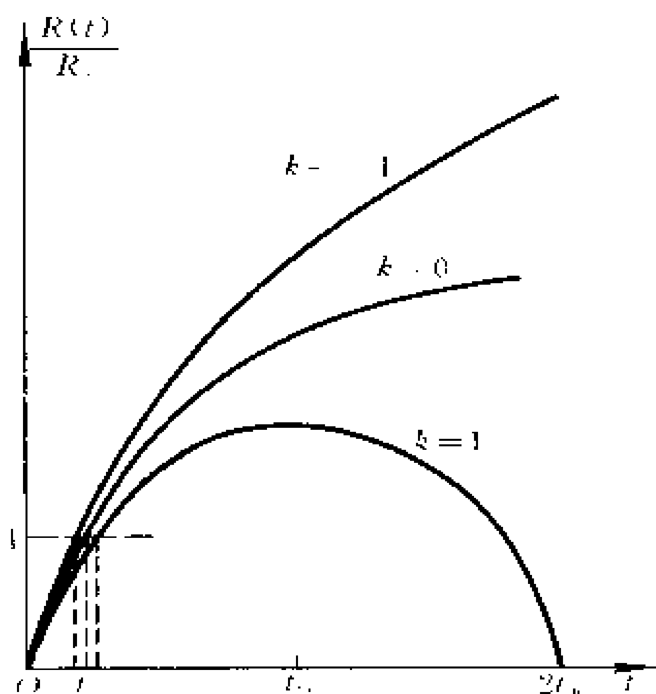


图 8.1 宇宙的膨胀过程

得出今天的年龄为

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}. \qquad (8.4.5)$$

(b) $\Omega_0>1$ 及 $\Omega_0<1$ 的情形

这时积出的函数为

$$t = H_0^{-1}\Big[\frac{\Omega_0}{2(\Omega_0-1)^{3/2}}\cos^{-1}(1-2(1-1/\Omega_0)R/R_0)$$
$$-\frac{1}{\Omega_0-1}(\Omega_0 R/R_0-(\Omega_0-1)(R/R_0)^2)^{1/2}\Big], \quad \text{当 } \Omega_0>1; \qquad (8.4.6)$$

$$t = H_0^{-1}\Big[\frac{-\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{3/2}}\cosh^{-1}(1-2(1-1/\Omega_0)R/R_0)$$

$$+\frac{1}{1-\Omega_0}(\Omega_0 R/R_0+(1-\Omega_0)(R/R_0)^2)^{1/2}\Big],\quad 当\ \Omega_0<1.$$

(8.4.7)

相应的曲线也都画入了图 8.1. 有一点值得注意，在 $\Omega_0>1$ 的情形下，当时间达到 $t_m=H_0^{-1}(\pi/2-1)$，$R(t)$达到极大值. 极大尺度为

$$R_{max}=\frac{\Omega_0 R_0}{\Omega_0-1},\tag{8.4.8}$$

此后它将转向收缩，即有限宇宙的膨胀阶段也是有限的.

这两种情况下的宇宙年龄公式为

$$t_0=H_0^{-1}\Big[\frac{\Omega_0}{2(\Omega_0-1)^{3/2}}\cos^{-1}(2/\Omega_0-1)-\frac{1}{\Omega_0-1}\Big],$$

$$当\ \Omega_0>1;\tag{8.4.9}$$

$$t_0=H_0^{-1}\Big[\frac{-\Omega_0}{2(1-\Omega_0)^{3/2}}\cosh^{-1}(2/\Omega_0-1)+\frac{1}{1-\Omega_0}\Big],$$

$$当\ \Omega_0<1.\tag{8.4.10}$$

下面，让我们对宇宙年龄进一步作些讨论. 把三种情形下的年龄公式统一地写成

$$t_0=H_0^{-1}f(\Omega_0).\tag{8.4.11}$$

与上面对照，$f(\Omega_0)$的含义是自明的. 这样明显地示出，宇宙年龄正比于 H_0 的倒数，比例因子与 Ω_0 有关. 图 8.2 画出了这因子随 Ω_0 的变化. 由图看出，H_0^{-1} 是宇宙年龄的上限，且宇宙年龄对 Ω_0 的依赖不很敏感. 从 H_0 和 Ω_0 的实测值推出

$$t_0=(0.6\sim1.7)\times10^{10}\ \mathrm{a}.\tag{8.4.12}$$

这就是宇宙年龄的理论推断值. 问题在于如何用实测来检验它.

宇宙年龄没有办法直接测量. 检验它的原理是这样的. 若某天体诞生于 t_1 时刻，那么它在今天的年龄为 $\tau=t_0-t_1$. 显然引申出的推论有两个:(1)任何天体的年龄 τ 均应小于宇宙年龄 t_0;(2)若该天体诞生很早，即很古老，以至 t_0 远大于 t_1，则 τ 是宇宙年龄的好的近似. 这样，利用有些古老天体的年龄可以测定，宇宙年龄

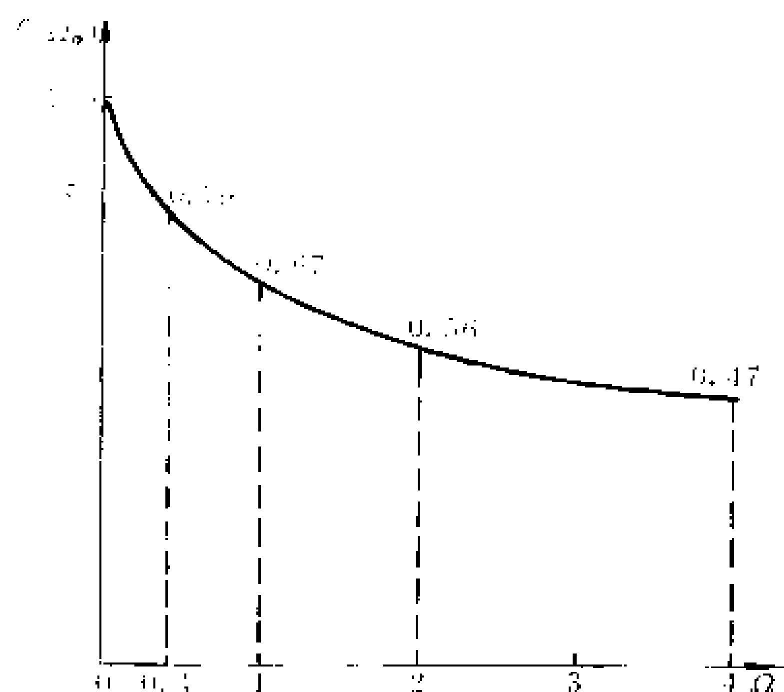


图 8.2 宇宙年龄因子 $f(\Omega_0)$

的一个好的近似值是可以由实测给出的.

现在被用于推断宇宙年龄的古老天体是球状星团. 球状星团的年龄是由它内部的恒星组分来推断的. 它与宇宙学理论毫无关系. 许多不同测量得出的值弥散在 150±30 亿年的范围内. 它与宇宙年龄的理论值完全相洽. 这当然对宇宙学理论是一个重要支持. 值得注意的是理论值和实测值中都还有较大的不确定性,因此这支持并不是最终的. 用更准确的实测值来作进一步的检验是十分需要的. 这方面的研究现状在后面还会谈到. 无论如何,在现有的水平上我们可以粗略地讲,宇宙年龄是在 100 亿年至 200 亿年之间.

§8.5 辐射为主的早期宇宙

§8.2 中曾指出，当 $R(t)/R_0<10^{-4}\sim10^{-5}$，辐射物质是宇宙介质中的主要组分．用上节解出的 $R(t)$（例如用式(8.4.4)）易于估出，这阶段约持续了几千至一万年．现在我们来讨论这早期宇宙的物理性质和动力学行为．

在辐射为主阶段结束，即实物为主阶段开始时，宇宙密度比现在高 12 个量级以上．这密度已远超过了星系、星系团和超星系团的密度，从而表明所有这些类型的天体在早期宇宙中都是不能存在的．今天宇宙物质的层次性结构是如何逐渐形成的问题，是宇宙学必须回答的基本问题之一．这问题我们将在 §8.13 中讨论．现在限于指出，结构的形成不过是物质局域结团的表现．因此，结团发生之前的宇宙是由只带微小密度起伏的均匀气体组成的．早期宇宙的面貌比现在要简单．但是早期宇宙的演化却有它独特的丰富性和复杂性．

热平衡的均匀气体有确定的温度．气体的绝热膨胀是要降温的．因此早期宇宙的膨胀过程是一个剧烈的降温过程．时间越早，这气体的温度越高．而高温气体中微观粒子的热碰撞是可能改变介质的宏观性质的．让我们在展开这讨论之前，先为它作一些准备．

讲早期宇宙以辐射为主，这辐射指的不仅是光子，它应包括所有热动能超过静能的粒子．例如电子的静质量为 0.5 MeV．当温度超过 10^{10} K，气体粒子的平均热动能 kT 超过了 1 MeV，所以电子的静质量也可忽略不计．这就是说，电子也可被看作辐射组分．这时气体粒子的热碰撞能容易地产生正负电子对．在产生和湮灭的统计平衡下，正负电子与光子一样，一定也是气体中大量存在的主要组分．当温度降至 10^{10} K 以下，因热动能不够，通过热碰撞产生正负电子对的几率渐趋于零．于是，正负电子将大量地通

过湮灭而消失，从而转化为介质的次要组分．这样的论据说明，当宇宙温度为 T 时，介质主要是由静能 mc^2 小于 kT 的一切粒子组成的．它们都统称为辐射．为了讨论的方便，下面我们将采用 $c=k=h=1$ 的自然单位制．[①] 这样，静能小于热动能表成 $m<T$，质量、能量和温度将都用 eV 量度．

现在我们来分析辐射气体的热性质．忽略了粒子的静质量，不同组分粒子可分为两大类．一类是自旋为整数的粒子，它服从玻色统计．一类是自旋为半整数的粒子，它服从费米统计．由玻色或费米统计算出任一组分的质量密度和粒子数密度对温度的依赖关系为

$$\rho=\begin{cases}\dfrac{\pi^2}{30}N_{\mathrm{B}}T^4, & \text{对玻色粒子；} \quad (8.5.1)\\[2mm] \dfrac{\pi^2}{30}\cdot\dfrac{7}{8}N_{\mathrm{F}}T^4, & \text{对费米粒子，} \quad (8.5.2)\end{cases}$$

和

$$n=\begin{cases}\dfrac{\zeta(3)}{\pi^2}N_{\mathrm{B}}T^3, & \text{对玻色粒子；} \quad (8.5.3)\\[2mm] \dfrac{\zeta(3)}{\pi^2}\cdot\dfrac{3}{4}N_{\mathrm{F}}T^3, & \text{对费米粒子，} \quad (8.5.4)\end{cases}$$

其中 $\zeta(3)=1.202\cdots$ 是宗量为 3 的黎曼 ζ 函数值，N_{B} 和 N_{F} 分别代表自旋自由度数．压强对密度的关系都是

---

① 这里和以后的计算都采用宇宙学的自然单位制 $h=c=k=1$，并把有关物理量都用 eV（电子伏）量度．国际单位制与它的关系是

时间　$1\ \mathrm{s}=1.52\times10^{24}\ \mathrm{GeV}^{-1}$，

长度　$1\ \mathrm{m}=5.07\times10^{15}\ \mathrm{GeV}^{-1}$，

质量　$1\ \mathrm{kg}=5.61\times10^{26}\ \mathrm{GeV}$，

温度　$1\ \mathrm{K}=8.62\times10^{-14}\ \mathrm{GeV}$，

其中 $1\mathrm{GeV}=10^9\ \mathrm{eV}$．这单位制中引力常数 $G=6.71\times10^{-39}\ \mathrm{GeV}^{-2}$．通常定义

$$M_{\mathrm{P}}\equiv\frac{1}{\sqrt{G}}=1.22\times10^{19}\ \mathrm{GeV}$$

为普朗克质量．

$$p = \rho/3. \tag{8.5.5}$$

这些关系描述了高温气体的主要热性质．

把(8.5.1 及 8.5.2)与(8.2.11)对照，我们得到

$$R \cdot T = \text{const.}. \tag{8.5.6}$$

这说明早期宇宙气体的温度随 R 的增大而反比地降低．因此我们可以借助基本动力学方程来求解宇宙温度 T 随时间的变化．

把方程(8.2.6)用于今天，其中密度项与曲率项是同量级的．但是两者随 R 下降的幂次却不同．因此外推到早期，曲率项必远小于密度项，而可以忽略不计．这意味着，早期宇宙空间总是很接近平坦的。于是方程(8.2.6)简化为

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2. \tag{8.5.7}$$

利用(8.5.6)，并代入密度与温度的关系(8.5.3 及 8.5.4)，我们得到宇宙温度的演化方程

$$\frac{dT}{dt} = -\left(\frac{4\pi^3 GN}{45}\right)^{1/2} T^3, \tag{8.5.8}$$

其中

$$N = N_B + 7N_F/8 \tag{8.5.9}$$

称介质的等效自由度．定义 $T=\infty$ 时为 $t=0$. 易于解得

$$T = CN^{-1/4}t^{-1/2}, \tag{8.5.10}$$

其中 $C^4 = 45/16\pi^3 G$. 若为估算方便，T 取 MeV 为单位，t 取秒为单位，则 $C=1.56$. 由粒子物理知道，在早期宇宙的条件下，$N=10\sim100$，因此 $CN^{-1/4}$ 的值很接近于 1.

让我们对早期宇宙状况建立一些数量的概念．当 $t<10^{-12}$ s，估出 $T>10^3$ GeV. 注意，这是粒子物理的能量范围．因此在这种时刻前后，宇宙介质中的热碰撞过程全是粒子物理过程．当宇宙演化到 $t=1$s，估出 $T=1$MeV. 这是核物理的能量范围．因此宇宙介质中将开始发生核物理过程．当降温至 $T=1$eV，宇宙年龄为 10^{12} s，即约一万年．这以后介质中将发生的是原子物理过程．

这样看来，早期宇宙的整体结构虽然非常简单，但是它的演化过程却蕴含着非常丰富的物理内涵．重要的问题是能否找到证据，表明这些过程确实发生过．我们下面将逐节讨论各个有关问题．其中背景辐射的发现是第一个证据，证明了上述关于宇宙早期演化的理论推断是符合事实的．

§8.6 背景辐射问题

我们知道，质子和电子结合成氢原子时放出 13.6 eV 的结合能．反之，能量超过 13.6 eV 的光子与氢原子相碰，会使氢原子电离．所以，当宇宙介质中能量超过 13.6 eV 的光子太多，介质中不会有中性氢原子，它们只能以电离状态存在．

把这机制用于早期宇宙，算出温度在 4000 K 以上，宇宙气体一定是电离的．电离气体的基本组分是离子和自由电子．可是在热平衡的电离气体中，满足普朗克分布的光子气体也是一定存在的．当温度降至 4000 K 以下，离子易与电子结成中性原子，而中性原子被光子电离的几率已极微小．于是气体从等离子态相变到了以中性原子为主的状态．光子在电离气体中频繁地与带电粒子相碰撞，即飞行自由程很短．在稀薄的中性原子气体中，光子被吸收的几率极微小，即自由程变得极长．因此在相变后，原来存在的光子气体变成无碰撞组分而永远存留了下来。这就是所谓的背景辐射场．

既然理论上预言应有背景辐射场存留至今，这就有了实测检验的可能．问题在于它的可观测性质是什么．背景辐射场的主要观测特征有三点：(1)它应高度地各向同性，这是早期宇宙高度均匀性的反映；(2)它的频谱应符合普朗克公式，这是早期宇宙高度热平衡的反映；(3)它的温度应在 10 K 以下，这是它从形成至今长期降温的结果．这些特征是足以把它与来自其他天体的辐射相区别开的．

由维恩位移定律知，温度在 10 K 以下的热辐射主要在微波波段，因此须用适当的射电天线或微波辐射计来接收．1965 年，正当普林斯顿大学的天体物理学家迪克(Dicke)等人为寻找这信号准备仪器时，贝尔电话实验室的彭齐阿斯(Penzias)和威尔孙(Wilson)却抢先发现了它．这二位的目的是在调整观测人造卫星用的一个天线．习惯上，天线噪声强度用同频率下的等效黑体辐射温度描述．他们测到的噪声温度为

$$T(\theta) = (4.4 + 2.3\sec\theta)\mathrm{K}, \qquad (8.6.1)$$

其中 θ 是天线与天顶的夹角．他们知道，式中第二项起因于大气辐射，第一项中有 0.9 K 来自天线欧姆损耗和地球的辐射．这样还有 3.5 K 噪声的来源不明．天线的不明噪声在贝尔实验室是个老问题．但是这次彭齐阿斯和威尔孙对它进行了认真的分析．他们用很大的努力排除了它来自天线自身的可能，从而肯定了它是一个来自地球之外的未知信号，信号源的温度为 3.5 K. 他们就这样完成了一个伟大的发现，但却并不知道所发现的是什么信号．普林斯顿大学的天体物理学家们得知这发现后，立即想到它可能正是他们准备寻找的早期宇宙的遗迹。随后，这信号的发现和理论解释同时发表了．接着若干天文学家用不同频率作了重复探测．他们也都得到了肯定的结果，且定出相接近的辐射温度．于是背景辐射场的被发现得到了学术界的公认．

彭齐阿斯和威尔孙最初用 4080 MHz 的天线所接受到的信号被证认是背景辐射，主要是因为它具有上述第一和第三个特征．要核验第二个特征，即频谱满足普朗克公式，须在波长为 1mm 上下作全面的测量．为此，人们在后来的二十多年中作了很大的努力．可是由于地面的测量受大气窗口的限制，所以长期以来一直没有明确的结果．最后是由“宇宙背景探测者”卫星在 1990 年完成了这个任务．图 8.3 示出了它测得的频谱．图中的小方块代表实测值及其误差，曲线代表用普朗克公式拟合的结果．从这结果看出，实际频谱是高度符合普朗克定律的．相应定出背景辐射温

度为 2.736±0.016 K．这样，背景辐射场的存在被证实到了几乎无可置疑的程度．

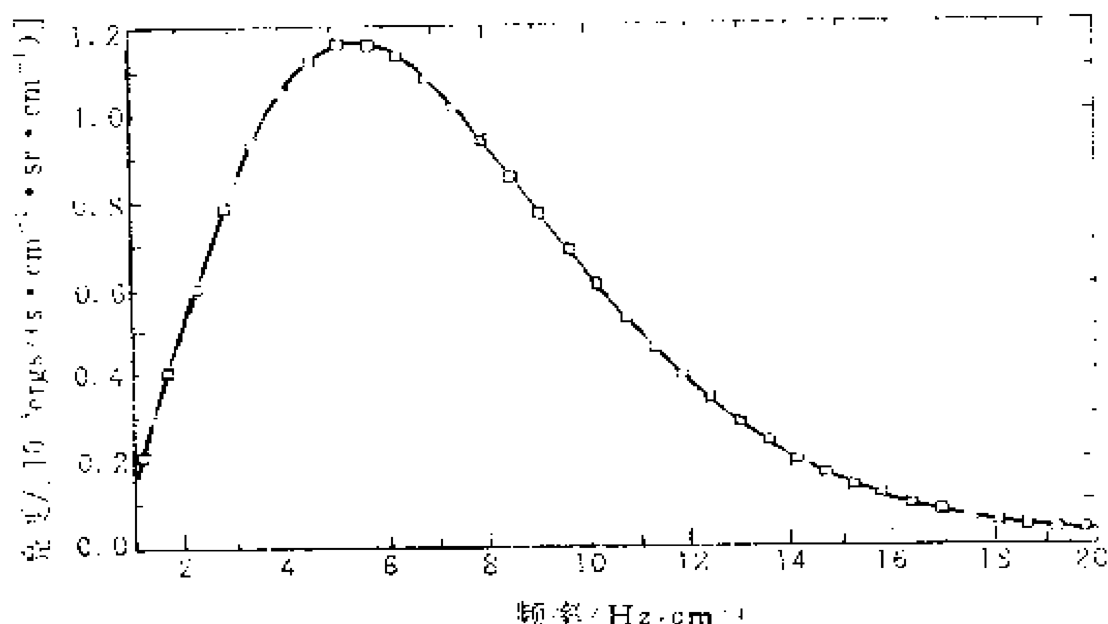


图 8.3 "宇宙背景探测者"卫星测得的频谱

背景辐射的实测研究的主要成就是证实了大爆炸宇宙学的基本思想．它表明早期宇宙确是高温高密的均匀气体，其温度至少曾在 4000 K 以上．这无疑是宇宙学的突破性的进展．它对宇宙学的另一个重要贡献是定量地检验了宇宙学原理，并发现了结构形成的种子．

§8.1 中已讲到，宇宙学原理是一个基本理论假设．由于今天的宇宙物质已显著地结团，它的密度不可能完全均匀．因此，结团发生前的宇宙在多大程度上是均匀的，这是检验宇宙学原理的重要问题．如果早期宇宙中有密度的不均匀性，背景辐射中应表现为温度的四极各向异性．长期的测量没有发现这样的各向异性，表明年龄为几千年时的宇宙确是高度地均匀的．这对宇宙学原理是强烈的支持．但是从结构形成的角度讲，量级为 10^{-5} 至 10^{-6} 的温度各向异性是必须存在的．否则今天已形成的物质结团

将无法解释．事实上，“宇宙背景探测者”卫星在 1992 年才测到了这温度的四极各向异性．以 10°为单元内的宇宙平均值为

$$\frac{\Delta T}{T} = 5 \times 10^{-6}. \tag{8.6.2}$$

由此推断，当时的密度相对不均匀度约为 10^{-4}，这对结构形成问题是一个非常重要的信息．一方面它定性地表明，早期宇宙中确有后来成为物质结团的种子的微小密度起伏存在．另一方面，它定量地为结构形成计算所需的初条件提供了限制．这问题在§8.13中还将讨论到．

微波背景辐射问题上的成功，表明用大爆炸模型追溯到年龄仅为几千年的早期宇宙，所得的结果是符合实际的．这自然鼓励了人们去探索更早发生过的过程．其中最深入地被研究过的是年龄为 3 min 前发生的原初原子核的合成过程．

§8.7 原初核合成问题

当年龄为 1s，宇宙温度为 1MeV(即 10^{10}K)．这时介质中的热碰撞足以使原子核瓦解，因此宇宙中尚不能有原子核存在．当时介质的主要组分是正负电子、正反中微子和光子．核子(即质子和中子的统称)与光子的数密度比 η 可由今天估出的比例来推知，它约是 10^{-9} 至 10^{-10}．因此它对当时气体密度的贡献是可忽略的．但是对本节要讨论的核合成过程讲，质子和中子正是问题的主角．

质子和中子能结合成最简单的原子核氘(D)，并放出 2.2 MeV的结合能．反之，能量超过 2.2 MeV 的光子与氘相碰撞，会把氘解离成质子和中子．因此，氘的大量产生作为核合成过程的第一步，须等到宇宙年龄为 3min．这时温度已降至0.1 MeV，能使氘核光分裂的高能光子已非常少．

一旦氘开始合成，后续的连锁反应将很快生成原子量为 3 和

4 的核 T(氚)、^3He 和^4He. 由于自然界不存在原子量为 5 的稳定核,连锁反应链中断了. 所以,原初核合成阶段最主要的产物是^4He. 其次是连锁反应中残留的 D 和^3He(T 最后也衰变成^3He),其数密度约比^4He 低 4 个量级. 最后还能合成的是微量的^7Li,其数密度约比^4He 低 8 个量级. 到宇宙年龄为半小时,温度降到了 10 keV. 这热动能已不足以引起热核反应. 于是,原初核合成阶段结束了,已形成的原子核存留了下来.

人们希望确切算出这阶段中每一种核的产额,以便定量地由实测来检验。这在理论上没有原则性困难. 当时可能发生的核反应有哪些是清楚的,每种核反应的截面可由实验测定,气体温度的变化过程已由宇宙学模型提供,所以算出产额是直截了当的事. 当然计算会十分繁复. 计算结果依赖一个我们并不确切知道的参量,它是核子与光子数之比 η. 理论上只能把它当自由输入参量,即计算产额对 η 的依赖关系. 图 8.4 中以曲线形式示出了这种计算的结果. 这里^4He 的产额用其丰度 Y_4 表示. 丰度指它在混合气体中的质量百分比. D,^3He 和^7Li 的产额用 y_2,y_3 和 y_7 表示. y 定义为该核与氢核的数密度比.

原初核合成的理论结果很确定,但是理论的实测检验却有一个重大困难. 理论算出的是核合成刚结束时的原初元素丰度,而实测的却是百亿年后的丰度. 两者并不能直接比较. 在这百亿年中,恒星的形成、演化和死亡是改变了元素丰度的. 因此,为与理论结果能相比,必须从实测值中扣除恒星过程的影响,但这是一个十分困难的任务. 无论如何,从 70 年代以来,人们陆续找到了一些由实测值推断原初值的方法,从而使理论得到了初步检验.

在自然界中,^4He 的丰度仅次于氢,所以在很多天体中可测定它的丰度. 为减少恒星演化的影响,人们着意对许多古老的河外 H Ⅱ 区测定了氦的丰度,以及氧、氮、碳的丰度. 氧、氮、碳是纯由恒星过程产生的元素,因此可作为恒星影响程度的代表. 统计地讲,Y_4 确随 Y_O,Y_N 或 Y_C 的减小而减小. 分析了氦与它们的丰度

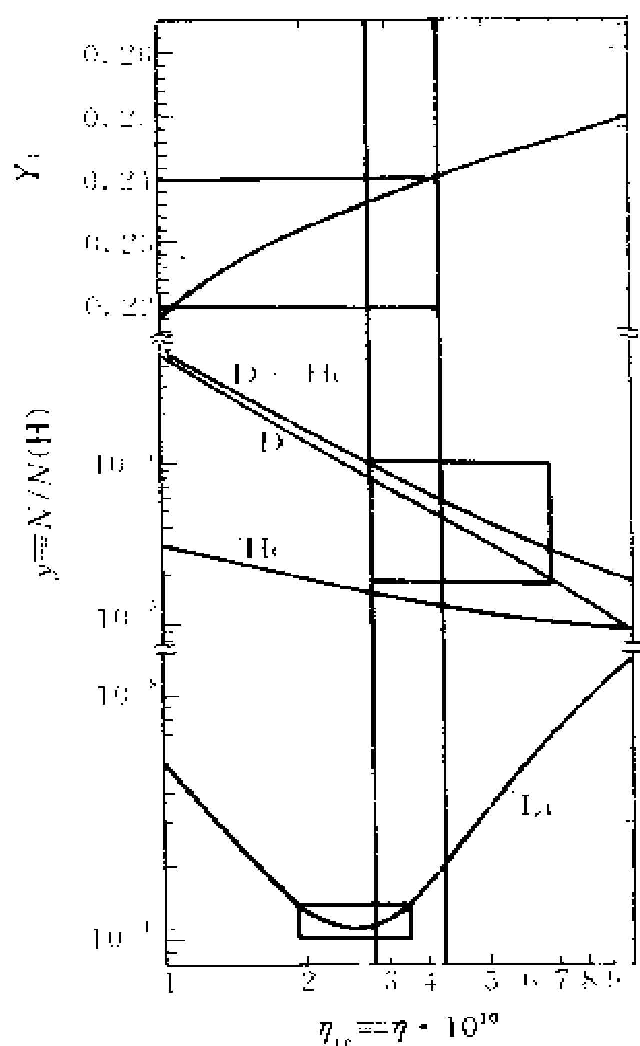


图 8.4 轻元素的原初丰度

关联，再把这种关联关系外推到 Y_O，Y_N 或 Y_C 趋于零，相应得到的氦丰度可认为是 Y_4 的原初值．用这方法定出的原初氦丰度

$$Y_{4p}=0.23\pm0.01. \tag{8.7.1}$$

D 与 ³He 的丰度很低，人们只能对邻近天体作测量．考虑到恒星过程是消耗氘的，因此实测到的氘丰度必小于其原初值．由此得出 1/2 原初值 y_{2p} 的下限

$$y_{2p}>y_2-1.8\times10^{-5}. \tag{8.7.2}$$

³He 丰度的演化要复杂的多．卷入恒星形成的原初氘在主序前都

烧成^{3}He，从而增加了^{3}He的丰度．但恒星主序阶段的演化却是消耗^{3}He的．采用恒星的一代形成近似，我们有

$$y_3 > f y_{3p} + g(1 - f)(y_2 + y_3)_p, \qquad (8.7.3)$$

其中f是实测气体中未卷入过恒星形成部分的百分比，g是^{3}He经过恒星过程后的残存率．用恒星演化理论可估算出g的值在1/4至1/2的范围内．我们安全地用$g>1/4$．因f难以估出，利用$y_2=fy_{2p}$，人们由(8.7.3)进一步导出一个与f无关的不等式．于是可由实测定出$y_{2p}+y_{3p}$的上限

$$y_{2p} + y_{3p} < y_2 + 1/(gy_3) < 1.0 \times 10^{-4}. \qquad (8.7.4)$$

关于^{7}Li，人们直至80年代才意识到，银晕中金属含量极低的亚矮星有很接近的锂丰度，且有理由认为它是原初的．这样从实测定出

$$y_{7p} = (1.0 \sim 1.4) \times 10^{-10}. \qquad (8.7.5)$$

若接受上述这些结果，我们就能够对宇宙原初核合成理论作初步的检验了．

把实测推断的原初值也画入图8.4中，我们看到，若取

$$2.8 \times 10^{-10} \leqslant \eta \leqslant 4.0 \times 10^{-10}, \qquad (8.7.6)$$

则相应的理论丰度是全面地与实测相洽的．这当然对宇宙学家是很大的鼓舞．但是值得我们注意，这种检验是初步的．里面还包含着很多争议．最终结论的得出还有待进一步的工作．如果宇宙核合成理论得到证实，则表明我们可以从理论上追溯到宇宙年龄仅为1s，而所得到的结果依然可靠．这意义的重大是不言而喻的．

宇宙核合成理论的实测检验还有一个十分重要的副产品，即在理论和实测的对比中我们能定出核子与光子的数密度之比η．光子数密度是可由温度推出的．这样，我们就可以导出宇宙中的核子数密度．这个量是至今无法由别的方法得到的．若接受初步结果(8.7.5)，则推出今天的核子物质平均密度与临界密度之比为

$$\Omega_N = 0.02 \sim 0.10. \qquad (8.7.6)$$

这结果有两重含义：(1)如果认为核子是宇宙物质的主要组分，那么宇宙曲率参量 k 必是负的，即宇宙是无限的；(2)如果实测的暗物质总密度显著地超过这个值，则表明暗物质主要不是由核子组成的．这导致了今天的宇宙物质以非重子为主的概念．我们将在§8.12 和§8.13 中再深入讨论这个问题．

§8.8 正反物质的不对称问题

本节讨论一个基本的宇宙学问题：为什么我们周围的物质都由质子、中子和电子组成，而由反质子、反中子和正电子组成的反物质却不存在．下面将看到，这问题与宇宙的甚早期演化有关．

首先让我们考虑，是否有确切证据能表明宇宙中物质和反物质是显著地不等量的．

由于反光子与光子是没有区别的，所以当我们限于观测电磁辐射，这辐射来自由物质组成的星系或由反物质组成的星系是不能区分的．因此要证明远处星系并不由反物质组成，我们只能找间接的办法．我们知道，星系之间是弥漫着稀薄气体的．所以，若既存在物质星系也存在反物质星系，则在正反物质的交界处必会有正反粒子的湮灭辐射出现．当探测不到湮灭辐射，这就成了没有反物质星系存在的证据．按这道理，人们已用观测证实，在我们周围 10Mpc 的范围内没有反物质星系存在．至于更远的星系是否由反物质组成，我们还没有实测信息，但却有很强的理论根据对此作否定的回答．

从物理的角度，已知的长程作用只有引力和电磁力，但它们都不能使粒子和反粒子发生大尺度的分离．因此，在 10 Mpc 的范围内没有反物质星系存在，已构成很强的理由，说明全宇宙不会有反物质星系存在．这样就值得认真考虑，为什么宇宙中正反物质会是不对称的．

这问题使理论家感到棘手的原因与粒子物理中的一条经验规

律即重子数守恒定律有关．重子的概念是核子概念的推广．粒子物理的无数实验表明，在任何已知过程中，重子与反重子的粒子数之差总是不变的．如果这是一条严格的物理规律，那么今天宇宙中正反核子数之差不等于零，就只能归之于宇宙的初条件，而不可能是演化的结果．理论家难以相信宇宙会有这样的初条件，因而把这问题称作正反物质不对称疑难．

把问题定量化，需要回答的是，为什么核合成时期的核子与光子数之比 η 为 $10^{-9}\sim10^{-10}$，因为这个量是甚早期宇宙中正反物质不对称程度的反映．从温度 $T\gg1$ GeV 的甚早期看，重子的静质量已可忽略．正反重子能通过热碰撞大量产生，因此它们也都是辐射性的宇宙气体的主要组分．设那时重子仅略多于反重子，则重子、反重子和光子的数密度都接近相同（参看 § 8.5.3 和 § 8.5.4）．这样，正反重子的不对称度可表为

$$A=\frac{n_{\mathrm{N}}-n_{\overline{\mathrm{N}}}}{n_{\mathrm{N}}}=\frac{n_{\mathrm{N}}-n_{\overline{\mathrm{N}}}}{n_{\gamma}}. \tag{8.8.1}$$

考虑到重子数的守恒性在能量低于 10^3GeV 的范围内已为实验证实，即有

$$n_{\mathrm{N}}-n_{\overline{\mathrm{N}}}\propto R^{-3}, \tag{8.8.2}$$

再利用光子数密度的性质

$$n\propto T^3\propto R^{-3}, \tag{8.8.3}$$

我们看到(8.8.1)式右边从那时以后一直是不变的．用原初核合成时期来估算，注意到这时核子静能已远大于热动能，成对的正反重子已湮灭，所以公式中的 n_{N} 只代表残存的重子数密度，而 $n_{\overline{\mathrm{N}}}$ 已成了零．这样就说明了，核合成时期的 η 值反映的正是甚早期的正反物质的不对称度．它确实是一个很小的量．后来的不对称度变为百分之百，则是原来大量存在的正反重子成对湮灭的结果．

上述推断使理论家猜想，最初的宇宙中正反粒子可能是等量的，由于某种尚不清楚的机制，使得在宇宙甚早期（$T\gg10^3$ GeV 时）产生了重子与反重子的微小的不对称度 A，其值正等于核合成

理论所要的 η. 这样，正反物质不对称疑难就彻底解决了．这想法的核心是预料，重子数的守恒性在能量很高的条件下可能会被破坏的．这对解决我们讨论中的疑难是关键所在，但是却并没有证据．

60 年代末，萨哈罗夫(Sakharov)作出了一个很重要的论证．他指出，从正反粒子对称的原初宇宙中演化出不对称，须具备三个条件：(1)存在破坏重子数守恒的相互作用；(2)这作用也破坏 C(正反粒子共轭)与 CP(复合反演)的守恒；(3)宇宙热平衡也必须曾被破坏．条件(1)的必要性正是上面所强调的．条件(2)和条件(3)的必要性是为了保证破坏重子数守恒的微观过程所造成的效果不会宏观地抵消掉．一旦具备这三个条件，正反物质对称的宇宙中就会自然地演化出不对称．当然，进一步需要的是定量地符合要求．当时从粒子物理的角度看，关键性的条件(1)就首先不具备，因此问题被延搁了下来．

70 年代中期，弱电统一理论的成功鼓励了粒子物理学家往弱、电、强大统一的方向发展．按大统一的思想，重子与轻子在超高能(估计 $E\gg10^{15}$ GeV)条件下应没有区别．重子衰变成轻子，从而破坏重子数守恒的过程应当是能够发生的，即破坏重子数守恒的相互作用应当是能存在的．实验显示的重子数守恒律只是在能量远低于 10^{15} GeV 时的近似规律．从宇宙学的角度看，如果这设想是对的，正反物质的不对称性通过甚早期演化来产生的想法就有了实现的可能．80 年代初，曾出现过不少用粒子物理的大统一模型来计算宇宙中应会产生的不对称度的尝试．定量的结果颇不令人鼓舞．同一时期里，粒子物理实验对大统一模型也并没有给出肯定的支持．看来问题在于大统一思想还没有找到正确的理论形式．80 年代末，人们意识到弱电理论中的 θ 真空结构也会导致重子数的不守恒．但是至今它也没有导致肯定的定量结果．

总之，宇宙中正反物质的不对称问题至今并没有解决．看来困难在于问题的粒子物理方面．即我们今天还没有一个可靠的超

高能物理理论．无论如何，从粒子物理已有的进展看，人们已不再把这问题看成一个棘手的疑难了．

§8.9 视界与平坦性疑难

尽管把标准宇宙模型用到 $t=1\mathrm{s}$ 开始的核合成过程仍显得很成功，但是人们发现一直这么简单地前推是不行的，这里会出现某些疑点很难解释．让我们讨论一下与视界和平坦性有关的疑问．

宇宙的视界指从任一点看，能与它用光信号相联系的区域的边界．视界的限制来自两种可能因素．一是由于宇宙膨胀时间的有限性，使光信号能传播的距离也是有限的．这叫粒子视界．二是在特殊时空结构下，光信号用无穷长时间也只能传播有限的距离．这叫事件视界．

我们先讨论粒子视界．设观测者处于 $r=0$. 若 $t=0$ 时，从 $r=r_H$ 处发出的光信号正好在 t 时刻到达观测者，则这 r_H 就是视界的坐标．利用光的传播满足 $\mathrm{d}s=0$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=-\frac{\sqrt{1-kr^2}}{R(t)} \tag{8.9.1}$$

这样，从 0 至 r_H 的固有距离 L_H 即为视界的大小，它是

$$L_H(t)=R(t)\int_0^{r_H}\frac{\mathrm{d}r'}{\sqrt{1-kr'^2}}=R(t)\int_0^t\frac{\mathrm{d}t'}{R(t')}. \tag{8.9.2}$$

我们已经知道，早期宇宙的 $R(t)$ 正比于 $t^{1/2}$，而晚期宇宙的 $R(t)$ 约正比于 $t^{2/3}$. 把它们代入，即可算出视界大小随时间的变化．因为我们只需要这大小的量级，所以把(8.9.2)的结果近似地写作

$$L_H(t)\approx t. \tag{8.9.3}$$

这里自然地看到，粒子视界的大小是随时间正比地扩大的．

对事件视界可同样地分析．设光信号从任一时刻 t 发出于坐标 r_H 处，它须经无穷长时间才到达 $r=0$，则这 r_H 就是事件视界的坐标．于是事件视界的大小表为

$$L_H(t) = R(t)\int_0^{r_H} \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = R(t)\int_t^{\infty} \frac{dt'}{R(t')}. \quad (8.9.4)$$

把早期或晚期的膨胀规律代入，结果都是无穷．这说明这类时空中不存在事件视界的限制．下节中将讨论当宇宙介质以真空为主时，膨胀规律将为

$$R(t) \propto e^{Ht}. \quad (8.9.5)$$

把它代入(8.9.4)式，得到

$$L_H(t) = 1/H \quad (8.9.6)$$

我们看到，在这情况下事件视界的大小是有限的常数．

宇宙的视界有两重物理意义．一方面，因为天文观测是借助光信号的传播实现的，所以视界代表了宇宙中的可观测范围．视界的有限性表明可观测宇宙的大小总是有限的．用今天的宇宙年龄推算出这大小约为 10^4Mpc. 实际观测到的遥远天体和我们的固有距离已接近今天的视界半径，因此人们把这范围内的那部分物质称为我们的观测宇宙．其外部区域是原则上观测不到的．这与仪器的能力没有关系．另一方面，因为用光信号都不能沟通的两点上发生的事件不会有因果关系，所以视界代表了宇宙中有因果联系的区域的最大限度．举例讲，要两点通过热输运而达到相同的温度，这就是因果联系，所以只有当它们的固有距离小于视界才可能．把视界的这两重含义结合起来，人们意识到一个疑点：我们观测宇宙的均匀性是无法由物理机制解释的，因为其中各部分在早期是不能有因果联系的．

上面已谈到，今天的观测宇宙与因果联系区是接近相同的．往早期追溯，观测宇宙中的物质所占的尺度是与 $t^{1/2}$ 成正比地缩小的，而因果区的大小却与 t 成正比地缩小，即后者缩小得更快．例如把时间往前追溯 10 个量级，即从 $t = 10^{10}$ a 的今天追溯到年龄为 1 a 的早期．我们观测宇宙在那时的大小比今天小 5 个量级，而当时因果区的大小却比今天小 10 个量级．这就是说，这块物质当时的大小比当时的视界大很多量级，它内部各部分之间是无法有

因果联系的．那么它怎么会是均匀的？这就是通常说的均匀性疑难．因它起因于早期宇宙中的视界太小，所以也称视界疑难．

早期宇宙中视界尺度很小，对星系的形成理论也带来了原则性的困难．通常理解，物质的结团起源于早期介质中相应质量尺度上的微小密度起伏．在宇宙的早期，星系质量的物质所占的大小比当时的视界也大很多量级．因此在那阶段，任何物理机制都不能产生这种尺度的密度起伏．这样，星系的起源变成了一个原则上不能由物理学回答的问题．这称为星系起源疑难，它也是视界疑难的表现．

下面，让我们考虑宇宙的准平坦性问题．

在宇宙的任何时刻定义 $\rho_c=\frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2$，以及 $\Omega=\rho/\rho_c$，方程(8.2.6)可化成

$$1-1/\Omega=3k/8\pi G\rho R^2. \qquad (8.9.7)$$

我们知道，在辐射为主的早期，等式右边正比于 R^2，而在实物为主的阶段，它正比于 R(参看式(8.2.10 和 11))．从甚早期到现在，宇宙尺度因子 R 已增大了几十个量级．若 $k\neq0$，Ω 对 1 的偏离也应该相应地增大几十个量级．这使今天 Ω 对 1 的偏离至多仅为 1 的量级变成了一个难以理解的事实．让我们对其中的疑难作一些分析．

若在某个早期时刻，Ω 对 1 的偏离是一个能合理想的普通数．那么由(8.9.7)式推出，在 R 膨胀增大几十个量级后，今天的 Ω 值应是 10^{BIG}(若 $k>0$)或是 $10^{-\mathrm{BIG}}$(若 $k<0$)，其中 BIG 指一个约为几十的数．这样，相应的宇宙面貌与现实将完全不同．若反过来，用实测的 Ω 值来推宇宙的初条件，(8.9.7)式给出

$$\Omega_{初}=1\pm10^{-\mathrm{BIG}}. \qquad (8.9.8)$$

注意到宇宙初密度 $\rho_{初}$ 和膨胀初速率 $H_{初}$(即 $\rho_{c初}$)应是两个独立参量．而条件(8.9.8)说明，若 $k\neq0$，则 $\rho_{初}$ 和 $\rho_{c初}$ 必定在很多位有效数字上相同，而又不完全相等．否则，我们的宇宙就不可能经过漫

长的演化而仍具有准平坦性，即 Ω 仍偏离 1 不远．我们的现实宇宙的初条件怎么会如此特殊，这无法由物理解释．它被人们称为平坦性疑难．

背景辐射和核合成的分析已表明，现有的宇宙模型前推到宇宙年龄为 1 秒以后，结果是正确的．而视界和平坦性疑难的分析则暗示了，在未经实测检验的甚早期，必存在对宇宙演化有重要影响的物理因素还没有被认识．80 年代初，古斯(Guth)在粒子物理大统一模型的启发下，指出了甚早期宇宙中曾有过短暂的真空为主的阶段．真空为主与辐射或实物为主不同，前者将使宇宙作加速膨胀．而这短暂的加速膨胀将能使视界和平坦性疑难得到自然的解决．这就是甚早期宇宙中的暴胀理论．它在甚早期演化的研究中无疑是一种极有价值的试探．

§8.10 甚早期宇宙的暴胀理论

相互作用的大统一理论与弱电统一理论一样，它们都是利用标量场 φ 的自作用来造成对称性的自发破缺．可示意地说明这机制的简单例子是令 φ 场的自作用势能密度有形式

$$V(\varphi) = -m\varphi^2 + \lambda\varphi^4. \tag{8.10.1}$$

在场论中，人们把能量最低的态叫做真空．这种自作用的特点是 φ 场具有反号对称，可是它的真空态不在 $\varphi=0$，而在 $\varphi=\varphi_0$ 或 $-\varphi_0$ (图 8.5)．设 $\varphi=0$ 态的能量比真空态的能量高 E_0，则不管实际真空态在 φ_0 或 $-\varphi_0$，只要场的能量低于 E_0，场的状态就失去了 φ 的反号对称性．这就是低能现象的对称性自发破缺．若场的能量高于 E_0，场的状态将恢复失去的对称．这机制是早先由希格斯(Higgs)提出的，因此相应的标量场 φ 也称希格斯场．

粒子物理所处理的是少量粒子的动力学系统，而宇宙学处理的是非零温度下的统计系统．当系统的温度为 T，希格斯场的真空由它的自由能密度 $F(\varphi,T)$ 取极小来标志．用量子统计方法，

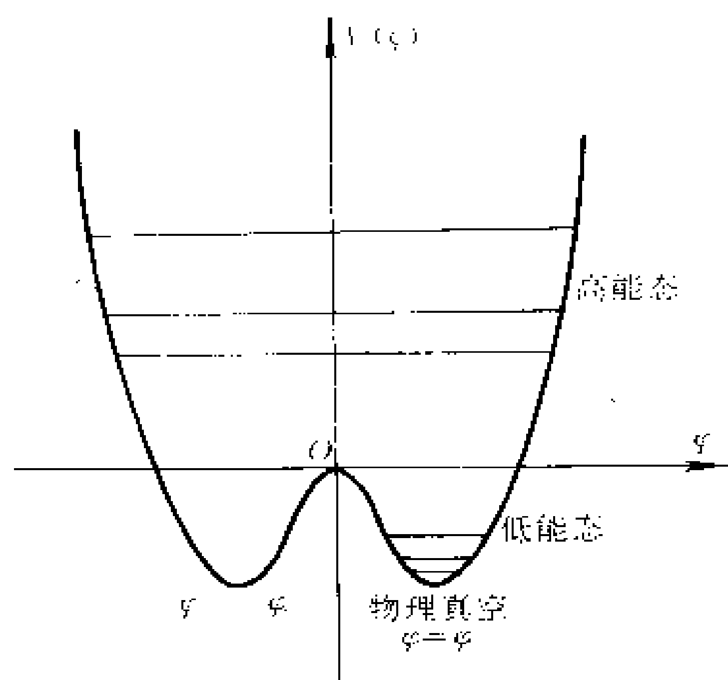


图 8.5　希格斯位势

可由 $V(\varphi)$ 算出 $F(\varphi,T)$. 它随 T 的变化如图 8.6 所示意．从图看出，当 $T>T_c$（临界温度），$\varphi=0$ 为真空态．这是一个保持原有对称的真空．当温度降至 T_c，对称破缺的真空态出现了，但它与对称真空的能量是简并的．温度再降低，$\varphi=0$ 态虽仍是 F 的极小，但它不再是最小的极小．因此，$\varphi=0$ 态成了亚稳的假真空态，它会自发地向 $\varphi=0$ 的对称破缺真空态跃迁．这种跃迁就是 φ 场的真空相变．若采用大统一模型，临界温度 T_c 约为 10^{15} GeV，相变前的对称真空的能量密度 ρ_{vac} 约为 T_c^4. 让我们来考虑这高温希格斯真空能对甚早期宇宙的影响．当宇宙温度远高于临界温度 T_c，时气体的能量密度（参看(8.5.1 和 2)）远大于真空能密度．因此这真空能的影响可以忽略，原来的标准模型完全适用．新的情况开始发生在温度为 T_c 附近．由于势垒的阻隔，真空相变并不能在 $T=T_c$ 后立即发生．宇宙温度继续因膨胀而降至 T_c 以下，而真空却仍滞留于 $\varphi=0$ 态，即宇宙处于相变前的过冷态．在过冷态下，

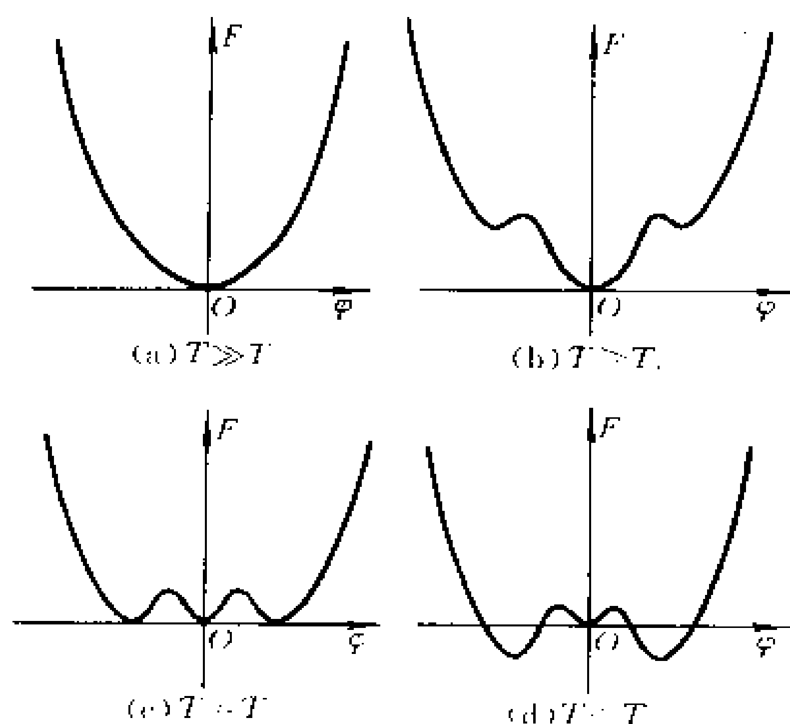


图 8.6　$F(\varphi,T)$随温度的变化

气体的热动能密度(约为 T^4)已变得小于真空能密度，即宇宙出现了真空为主的状态．这是原来的标准模型所没有考虑过的情形．

注意到真空能密度是常数，宇宙早期动力学方程(8.5.7)的解变为

$$R(t) \propto e^{Ht}, \tag{8.10.2}$$

其中 $H=(8\pi G\rho_{vac}/3)^{1/2}\approx(8\pi GT_c^4/3)^{1/2}\approx10^{34}\,s^{-1}$是当时的哈勃参量值．这结果表明，在相变完成前，宇宙会发生非常剧烈的加速膨胀．人们因此称它为暴胀．最终总会在温度远低于 T_c 的某个时刻，真空完成了从对称相向对称破缺相的过渡．这两个相之间的能量差将作为相变潜热放出，使气体的温度回升至接近 T_c．这样真空相变就结束了．相变结束后，由于破缺真空态的能密度已很低，它重新可被忽略不计．这样，宇宙又恢复了按标准模型的正常膨胀．

暴胀持续的时间与自作用 $V(\varphi)$ 的细节有关．理论并不能作确切的预言．从宇宙学的角度看，古斯第一个指出，若持续时间 Δt 使 $H\Delta t \approx 100$（利用大统一模型定出的 H 值，这意味着暴胀须持续约 10^{-32} s），则视界和平坦性疑难就自然地得到了解决．

让我们先回到视界问题上来．若 $H\Delta t \approx 100$，在这短暂的暴胀阶段中，宇宙尺度因子 $R(t)$ 将增大 e^{100} 倍，即 43 个量级．它比漫长的正常膨胀阶段所增大的总倍数还大．可是如上节指出，在真空为主阶段，宇宙视界却是常数．由此推出，我们的观测宇宙的大小在暴胀之前是远小于当时的视界尺度的（图 8.7）．这样，与宇宙均匀性和星系起源相关的视界疑难就不存在了．

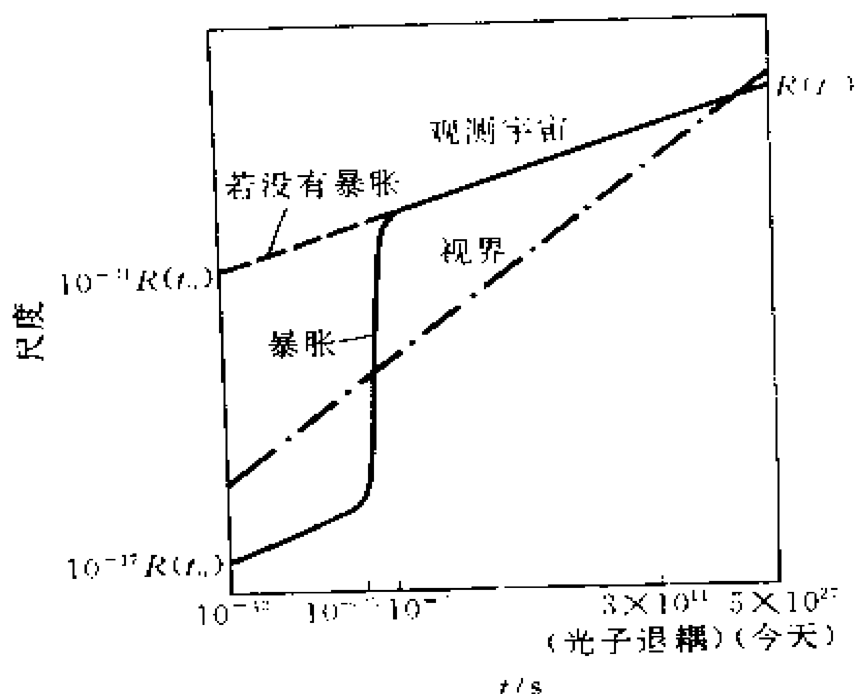


图 8.7　暴胀对尺度的影响

再回到(8.9.7)式，来看暴胀理论对平坦性问题的影响。在宇宙以真空为主阶段，因真空能密度是常数，Ω 对 1 的偏离，即(8.9.7)式左边是与 R^2 成反比地降低的．注意这影响与正常膨胀阶段的影响是相反的，因此它是使平坦性疑难得到缓解的因素．若暴胀持续时间满足 $H\Delta t \approx 100$，则在这阶段中 $1-1/\Omega$ 压低了 86 个

量级．它已远超过了正常阶段引起的放大．这样，平坦性疑难就消失了．不仅如此它还推论，只要初始的 Ω 值是一个普通的数，经过短暂的暴胀和漫长的正常膨胀，今天应有

$$\Omega_0 = 1 \pm 10^{-N}, \tag{8.10.3}$$

其中 N 是一个远大于 1 的数．这是暴胀理论的重要预言．它可由实测作判定性的检验．如果实测肯定 Ω_0 对 1 有例如 1%的偏离，那将是对暴胀理论的强烈否定．

值得强调，暴胀理论至今仅是一个试探性的理论．它既没有牢固的物理基础，也没有可靠的实测证据．因此我们并不能讲宇宙暴胀是肯定发生过的．但是从这理论提出以来，它却一直受到很大的重视．这是因为它对其他宇宙学问题的研究产生了许多积极的影响．

暴胀理论对宇宙学产生的最大的影响是预言了 $\Omega_0 = 1$. 由于宇宙核合成的研究已推断出 $\Omega_N \ll 1$，因此暴胀理论的这个预言强烈地暗示了宇宙的主要组分是非重子物质．而在此前，人们正感到重子为主宇宙中存在演化时间不够、星系至今难以形成的严重困难．所以，宇宙以非重子为主的概念为结构形成的研究带来了新的局面，并产生了许多重要的进展．此外，这预言也对宇宙暗物质的总量和主要组分的研究带来了新的启发．这些问题在§8.12和§8.13节中还会讨论到．

暴胀理论的另一重要影响是使得寻找原初扰动的物理起源有了可能．在真空相变引起暴胀的图景中，在宇宙不同部分发生相变的时间有小的差别，它会给相变后的宇宙带来微小不均匀性．由这机制算出的进视界扰动谱，与 70 年代哈利孙(Harrison)和泽尔道维奇(Zeldovich)从唯象分析所推断的谱是一致的．这无疑是结构起源研究的一个开创性的进展．顺便指出，背景辐射的实测中已证实了有超视界扰动的存在．这使得超视界扰动的起源疑难从一个理论问题变成了一个现实问题．它自然也加强了人们相信暴胀曾发生过的信念．

最后说明一下暴胀的可能机制问题．理论上已有证明，为解决视界疑难和平坦性疑难，宇宙早期曾有过短期的加速膨胀是必要条件．古斯最初提出的与大统一模型相联系的机制只是引起加速膨胀的一种可能机制．近十来年中，人们已提出过许多会在其早期宇宙中引起暴胀的可能机制．显然，这些机制都涉及超高能下的物理规律，因此也都还没有扎实的实践基础．总之，暴胀至今还远不是一个肯定了的理论，但人们却已深深地感到，它应是早期宇宙中的一个不可缺少的要素．

§8.11 宇宙常数问题

我们在§3.6中推导出引力场方程(3.5.6)时曾指出，这里取了 $\lambda=0$. 当爱因斯坦用它研究宇宙的动力学结构时，他发现这方程没有稳态的宇宙解，而他当时却先验地认为宇宙应当是静止不变的．于是爱因斯坦恢复了方程中的 $\lambda g_{\mu\nu}$ 项，以得到稳定解．这里的 λ 因此被称为宇宙常数．可是事过不几年，天文学家即发现了宇宙膨胀的迹象．爱因斯坦很快对此作出了反应．他在给他的朋友外尔(Weyl)的信中说："如果不存在静态的宇宙，那么把宇宙常数去掉吧."

使宇宙常数问题复活的契机是量子场论的发展．按量子场论的概念，某场处于基态时，它已没有能量可向外输出，因此基态被定义为真空．真空是否实际具有能量，在量子场论中是无关紧要的，所以通常把真空能量密度定义为零．但是从引力物理讲，真空态若有能量，它一样会产生引力，即造成时空的弯曲．因此，真空能量密度是不能人为地规定为零的．从协变性要求考虑，真空态的能量动量张量一般地只能有形式

$$T_{\mu\nu}=\rho_{\text{vac}}g_{\mu\nu}, \tag{8.11.1}$$

其中 ρ_{vac} 是真空能密度．这样我们看到，在引力源 $T_{\mu\nu}$ 中加上真空的贡献，其效果与在场方程中添加宇宙项是一样的．因此，宇宙项

是否可去掉与真空能密度是否为零，变成了一个问题中分不开的两面．

既计及宇宙项又计及真空能，场方程(3.5.6)变成

$$R_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} = - 8\pi G(T_{\mu\nu} + \rho_{\text{vac}} g_{\mu\nu}). \qquad (8.11.2)$$

有两种形式可把宇宙常数与真空能的贡献并起来．一是引入等效宇宙常数

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda + 8\pi G \rho_{\text{vac}} \qquad (8.11.3)$$

代替 λ，这样方程右边的真空能的贡献已包括在内了．二是引入等效真空能

$$\rho_{\text{eff}} = \rho_{\text{vac}} + \lambda/8\pi G \qquad (8.11.4)$$

代替 ρ_{vac}，这样方程左边的宇宙项已被包括了．这两个等效量的关系为

$$\lambda_{\text{eff}} = 8\pi G \rho_{\text{eff}}. \qquad (8.11.5)$$

总之，这两者的动力学效果是分不开的．而这样产生了一个问题．出现在引力场方程中的 λ 是一个基本物理常数，它的大小应只能由实测确定．上面的分析则说明，实测原则上不能单独地决定 λ，只能定出 λ_{eff}或 ρ_{eff}．因此 λ 是否为零的问题就不单纯是一个实测问题，它与 ρ_{vac}的大小直接有关．这样，宇宙常数问题变复杂了．

当用场方程(8.11.2)，并利用(8.11.4)来讨论均匀各向同性的宇宙，所得到的动力学方程变为

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \rho_{\text{eff}})R^2, \qquad (8.11.6)$$

和

$$\ddot{R} = - \frac{4\pi G}{3}(\rho - 2\rho_{\text{eff}})R, \qquad (8.11.7)$$

由于我们将限于讨论晚近的宇宙，所以方程中已代入了 $p=0$. 从方程(8.11.7)立即看出，真空能或正的宇宙常数与其他引力源相反，它产生的是斥力．爱因斯坦能引入宇宙常数以得到稳态的宇

宙解，其原因正在这里．

现在我们对等效真空能 ρ_{eff} 的大小更感兴趣．利用减速参量 q 的定义(8.3.10)，场方程(8.11.6)给出

$$\rho_{eff} = \rho/2 - q\rho_c, \tag{8.11.8}$$

其中 ρ_c 仍是由哈勃常数定义的临界密度．(8.11.8)式右边都是可观测量，因此等效真空能是否为零，原则上是可由测量判定的．目前这几个量的实测不确定度都还很大，所以对 ρ_{eff} 还不能有明确的推断．无论如何，我们已能由实测得到一个安全的上限．用普通单位表示为

$$\rho_{eff} < 10^0 \rho_c \approx 10^4 \ \mathrm{eV/cm^3}. \tag{8.11.9}$$

注意，这结果并不排斥它实际上为零．为想进一步知道基本常数 λ 的大小，须估算真空能密度 ρ_{vac}．正是这一步，结果出现了非常令人困惑的局面．

用量子场论估算真空能密度的基本道理是这样的．任一量子场可按傅里叶展开分解成无数不同频率的谐振场的叠加．每一种谐振场的基态都有零点振动能 $h\nu/2$，因此真空态的总能量密度是无穷大．这里的发散性来自高频场的贡献，因而并不可靠．为安全起见，让我们只保留最可靠的频率部分，例如只取 $h\nu < 10^3$ GeV 的场，这样估出的结果为

$$\rho_{vac} \approx 10^{64} \ \mathrm{eV/cm^3}. \tag{8.11.10}$$

它比 ρ_{eff} 的上限要高出好几十个量级．

这估算的是一种玻色场的基态能密度．实际的真空应是一切量子场的基态．因此这基态能密度应与一切场量子的质量和相互作用有关．如果总的 ρ_{vac} 仍比 ρ_{eff} 高几十个量级，它的推论将很令人困惑．

从(8.11.4)看出，$\lambda/8\pi G$ 须在几十位有效数字上与 ρ_{vac} 一致，而又不完全相等，以抵消后得到实际的 ρ_{eff}．如若少抵消一位，剩余的 ρ_{eff} 就大一个量级，宇宙的演化进程将会与现实完全不同．这意味着宇宙常数 λ 不仅不是零，且与真空能密度 ρ_{vac} 的大小必须经过

高精度的细调，否则今天的宇宙就不会是这样．考虑到前者是基本物理常数，而后者却与粒子物理的全部细节有关，要它们之间正好有这样的密合是无法理解的．

70 年代后期，粒子物理中超对称大统一理论的出现曾给问题的解决带来过希望．按超对称的思想，任一种玻色子必有同质量的费米子与之对应．这样，它们的真空能密度将相互抵消而成为零．若 ρ_{vac}是零，上面讲的高精度的细调就不需要了．理论家猜想，ρ_{vac}是零意味着 λ 也可能是零，从而推断 ρ_{eff}或 λ_{eff}也是零．这样一切回到常识容易接受的局面．可是问题远没有沿这条思路得到顺利的解决．从超对称讲，粒子物理的事实清楚表明，它至多只能是一种破缺的对称性，即仅在高能条件下才严格成立．计及低能下的不对称所剩下的真空能，结果仍比 ρ_{eff}的上限高出好几十个量级．所以问题的困惑并未得到缓解．用此后发展起来的超引力和其他理论，又出现过真空能会自动地抵消成零的迹象，但也都没有成功．甚至连会抵消得足够小的迹象也看不到．

总之，宇宙常数问题作为物理理论问题，要点在澄清理论上的 ρ_{vac}远大于实测的 ρ_{eff}的本质原因．许多理论家认为问题源于我们缺乏可靠的高能理论．他们希望找到一种新的高能物理原则，由它保证一切场的真空能之和自然是零．但是他们至今没有成功．大量这类努力的不成功，使有人意识到问题的根源可能更深刻．它可能暗示着我们关于真空和真空能的概念需要有根本的变革．如果如此，宇宙常数问题将是物理学的一个重要的生长点．

宇宙常数问题作为观测宇宙学问题，要点在于澄清 ρ_{eff}究竟是否为零．等效宇宙常数的存在会在宇宙学中造成许多可观测效果．如果从某一类观测能给出 ρ_{eff}的非零下限，那将是宇宙常数问题的极重要的进展．现今人们还只能定出它的上限．最严的上限是由引力透镜效应给出的，它是

$$\Omega_V = \rho_{eff}/\rho_c < 0.9. \qquad (8.11.11)$$

目前最令人注意的是宇宙年龄问题．1995 年，哈勃空间望远镜初

步定出的哈勃常数值为

$$H_0 = 80 \pm 17 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}. \tag{8.11.12}$$

由此按 ρ_{eff} 为零的理论公式算出的宇宙年龄将小于球状星团的年龄．引入正的 ρ_{eff} 会加大宇宙年龄的理论值．宇宙年龄有一个很好的近似公式，

$$t_0 \approx \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{\sinh^{-1} \sqrt{(1-\Omega_a)/\Omega_a}}{\sqrt{1-\Omega_a}}, \tag{8.11.13}$$

其中 $\Omega_a = 0.7\Omega_m - 0.3\Omega_v + 0.3 \leqslant 1$，$\Omega_m$ 是物质的宇宙学密度，Ω_v 由(8.11.11)式定义．若接受 $H_0 = 80$ km・s^{-1}・Mpc^{-1}、无宇宙常数的平坦宇宙模型，即令 $\Omega_v = 0$ 和 $\Omega_m = 1$，预言的宇宙年龄仅为 8Ga．如已指出，它显著地低于实测允许的范围．如果改取 $\Omega_v = 0.8$ 和 $\Omega_m = 0.2$ 的平坦宇宙模型，年龄的理论值增大到 13.5 Ga．它恢复了与实测的相洽性．人们由此意识到，大的哈勃常数若最终被肯定，它将是否定等效宇宙常数为零的有力证据．但是宇宙常数的实测值的大小终究也还是一个至今未解决的问题．

§8.12　暗物质问题

§8.3 中已指出，宇宙物质中发光部分不是主体，暗物质才是其中的主要部分．因此，暗物质的总量和暗物质的组分问题是宇宙学的基本问题之一．让我们先讨论宇宙密度的测定问题．这里的困难在于如何测定天体的质量．

天体质量的测定是利用它产生的引力．旋涡星系的平衡主要由于恒星的转动，因此距中心 r 处的恒星的转速 V 与半径为 r 的范围内的物质总质量 M 有关系

$$V^2 = GM/r. \tag{8.12.1}$$

这样，测定 r 和 V，就可以推断质量 M．球状星团、椭圆星系或星系团的平衡主要由于恒星的无规运动．按维里定理，恒星无规运

动速度的平方平均值与恒星集团的总质量应满足与(8.12.1)同样的关系．这里的 r 是恒星集团的维里半径．所以，这类恒星集团的总质量也可通过 r 和 V 的测量来推断．

如果认为星系是宇宙物质的主要存在形式，那么宇宙平均密度 $\rho=MN/V$，其中 N/V 是星系的平均数密度，M 是星系的平均质量．由于星系的质量差别很大，平均质量的含义很不确定．不同星系的质量和光度之比 M/L 的差别却小得多．因此人们把密度公式改写作

$$\rho = L \cdot \frac{N}{V} \cdot \frac{M}{L} = \mathscr{L} \cdot \frac{M}{L}, \qquad (8.12.2)$$

其中 $\mathscr{L} \equiv L \cdot N/V$ 是宇宙的平均光度密度，即单位体积内的星系的总光度．实测已定出

$$\mathscr{L} = 2.4 \times 10^8 h L_\odot/\mathrm{Mpc}^3. \qquad (8.12.3)$$

其中 $L_\odot$ 代表太阳光度，它是天文学中常用的光度单位．这样，宇宙平均密度就可以由平均质光比来推断。

当认为星系质量主要集中在它发光的范围内，实测定出星系的质光比为 3～7(以太阳的质光比为单位)．以 Ω 代替 ρ 来标志密度，推得

$$\Omega_{光} = 0.007, \qquad (8.12.4)$$

这就是前面提到的结果：发光物质的平均密度远低于宇宙临界密度．但是实测已表明，星系发光区外的暗物质总量要超过发光物质．证据来自旋涡星系的转动曲线的测定．如果发光区外的气体质量可以忽略，由(8.12.1)知，外部气体的转速应随距离的增大而反比地减小，如图 8.8 中的虚线所示．但是发光区外实际的转动曲线并不下降，而是平直地延伸，如图中的实线所示意．转动曲线的平直意味着质量随距离成正比地增大(参看(8.12.1)式)．实测的转动曲线可平直地延伸至发光区半径的 3 至 10 倍．这暗示我们，星系发光区外有很大的暗晕，其总质量超过发光区内的质量的几倍至十几倍．计及暗晕的贡献后，我们有

$$\Omega_{晕} = 0.03 \sim 0.10. \tag{8.12.5}$$

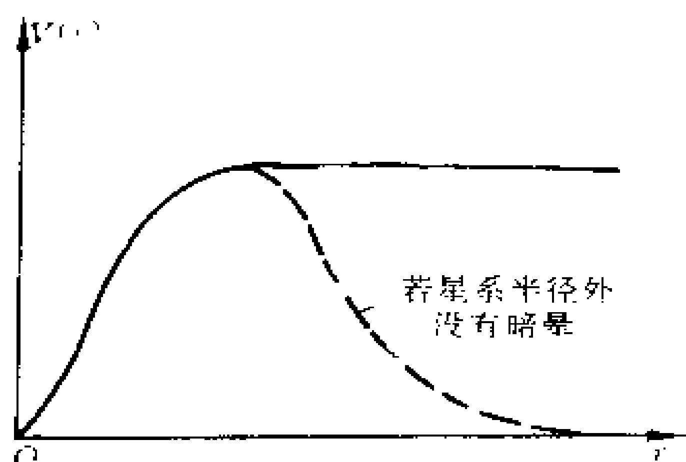


图 8.8 星系转动曲线示意图

星系和星系之间的空间体积很大．分布在其中的弥漫物质的总质量也可能超过一切星系的总质量．早在 30 年代，天文学家从富星系团的研究中已发现，它的质量必须超过其中发光星系总质量的 10 至 100 倍，它才能维持平衡．这是星系际暗物质对宇宙密度有重要贡献的最早的证据．利用近代对星系团的质光比的测定，并利用(8.12.2)，推断出的宇宙密度为

$$\Omega_{团} = 0.2 \pm 0.1, \tag{8.12.6}$$

这结果表明，即使把暗晕当作星系的一部分，星系之间还蕴含着更多的暗物质．

如果在比星系团更大的尺度中还有大量的弥漫物质，它们在上述测量中是测不到的．因此结果(8.12.6)是为宇宙密度提供了一个下限．它是人们迄今知道的最大的可靠下限．

让我们把(8.12.6)与暴胀理论的预言作一个比较．在 § 8.10 节中已讨论过，宇宙学强烈地需要暴胀理论，而这理论预言 $\Omega=1$．如接受这理论，则表明宇宙中尚未被测到的暗物质比从星系团尺度内已测到的物质还要多若干倍．这结论是否符合事实是暗物质

研究中有待澄清的最重要的问题之一．由于这部分没被测到的物质必分布得更弥漫，所以它的存在须用宇宙学尺度的测量才能证实．60年代以来，已有人在大尺度上对星系计数及星系本动速度场作了实测和统计研究．其中星系计数给出过结果

$$\Omega_0 = 0.9^{+0.7}_{-0.5}. \tag{8.11.7}$$

本动速度的测量也给出过类似的结果．至今这种测量的误差都还较大，方法上的争议也较多．无论如何它们初步地给出了支持暴胀理论的倾向．

然后把暗物质密度的实测结果与核合成理论预言的(8.7.6)相比．我们看到，宇宙密度很可能显著地超过了宇宙核子物质的总密度．如果这一点被肯定，那将意味着宇宙中的大部分物质不仅不发光，而且不是由核子组成的．这无疑对宇宙学是一个重要的新概念．它不仅给暗物质的研究带来了新课题，而且对宇宙结构形成的研究也会产生很大的影响．

现在我们转向暗物质的主要组分问题．从天文学的角度看，暗物质有大量的存在形式．很多类型的天体，例如极暗的小恒星、死亡了的恒星、未形成恒星的原星系云、瓦解了的星系、星际和星系际气体等都应表现为暗物质．但是，所有这些天体本质上都是由核子组成的．所以如果宇宙以非重子为主，它们都不能是暗物质的主要形态．暗物质的主要存在形式是什么？就成了一个全新的问题．但从理论物理的角度看，可以作为主要非重子暗物质的候选者是很多的．

在已知粒子中，人们首先考虑过中微子．中微子在宇宙年龄为1秒时开始与其他组分失去了耦合，而作为宇宙背景的一部分存留了下来．算出今天的中微子数密度约为每立方厘米100个，因此若中微子有约30 eV的静质量，这背景中微子对宇宙密度的贡献就会达到$\Omega \approx 1$．可是对中微子是否有静质量的问题，至今理论上和实验上都还没有明确的结论．另外被讨论得较多的候选者

是超对称大统一理论中的 neutralinos 和强 CP 理论中的轴子(Axions). 这类粒子在退耦时的热运动速度已小于光速,因此被称为冷暗物质. 这些粒子的存在,至今并没有实验证据. 对它们感兴趣的重要原因是由于它们对结构形成的影响与中微子有很大的不同. 下一节中将讨论到,冷暗物质的存在,对解释星系的形成是有利的. 除实物粒子外,最值得注意的可能对象是真空. 上节已讨论过,真空能密度是否为零是一个复杂而深刻的物理问题. 从暗物质的角度看,如果真空贡献 $\Omega_v \approx 0.8$,它将是今天宇宙的主要组分. 真空对结构形成的影响与实物粒子又不一样. 因此,宇宙结构形成问题的研究是人们探索暗物质本质的一条重要途径. 有关的进展将在下节中再继续讨论.

§8.13 宇宙结构的形成问题

最后我们回过来讨论一个宇宙学中的最现实的问题,即如何从高度均匀的早期宇宙中演化出今天的层次性结团状态的问题.

金斯(Jeans)在本世纪初已发现,当大尺度均匀介质中有微小的密度起伏,介质的自引力会导致这密度起伏的增大,从而使介质更不均匀. 这就是均匀宇宙中会演化出物质结团的基本物理机制.

设由于扰动造成的密度分布为

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_0(1 + \delta(x,y,z,t)), \qquad (8.13.1),$$

其中 ρ_0 是均匀的背景密度,δ 称密度反差. 开始阶段,密度反差 $\delta \ll 1$. 用理想流体动力学方程和牛顿引力场方程可导出微小密度反差 δ 满足的微分方程. 取线性近似后,它有形式

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \delta = 4\pi G \rho_0 \delta, \qquad (8.13.2)$$

其中 $v_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)^{1/2}$ 是均匀背景中的声速. 若对密度反差作傅里叶

展开，

$$\delta(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\delta_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}d^3k. \quad (8.13.3)$$

其傅里叶分量 $\delta_k(t)$ 相应地满足

$$\ddot{\delta}_k + (v_s^2k^2 - 4\pi G\rho_0)\delta_k = 0. \quad (8.13.4)$$

令

$$\omega^2 = v_s^2k^2 - 4\pi G\rho_0, \quad (8.13.5)$$

则有

$$\delta_k(t) = Ae^{\pm i\omega t}. \quad (8.13.6)$$

容易看出，当 ω 为实数，扰动将以声波的形式振荡，而当 ω 为虚数，相应的扰动分量将会指数地增大．这就是金斯的引力不稳定性理论的要点．

上述结果有一个简单的物理解释．(8.13.5)右边第一项是压强梯度对扰动的恢复效应，而第二项是引力对扰动的放大的效应．当扰动波长 λ 很小（即 $k=2\pi/\lambda$ 很大），压强的效果为主，引力效果可忽略．这正是密度扰动在压强驱动下以声速传播的机制．反之，当 λ 很大（即 k 很小），以至引力效果远超过压强效果，则密度反差为正的区域将因自引力而收缩，使密度反差进一步增大．当达到 $\delta\gg1$，就造成了物质的结团．

这两类情形的分界波长称为金斯尺度 λ_J，

$$\lambda_J = 2\pi/k_J = \left(\frac{\pi v_s^2}{G\rho_0}\right)^{1/2} \quad (8.13.7)$$

它由背景气体的密度和声速决定．为了方便，人们也常用金斯质量 M_J 代替金斯尺度．M_J 定义为背景气体中半径为 $\lambda_J/2$ 的球内的质量，即

$$M_J = \frac{4\pi\rho_0}{3}\left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 = \frac{\pi\rho_0}{6}\left(\frac{\pi v_s^2}{G\rho_0}\right)^{3/2}. \quad (8.13.8)$$

这样，若微小扰动涉及的区域内的总质量超过金斯质量，这小扰动将会因自引力不稳定性而发展成物质的局域结团．反之，这小扰

动的幅度将不会增长．

金斯的理论原本是对静止的均匀介质而言的．把这理论应用于膨胀中的均匀宇宙，只要扰动区的尺度远小于宇宙的曲率半径和视界，扰动演化的动力学行为仍可用牛顿力学处理．考虑到背景宇宙应满足标准的弗里德曼(Friedmann)方程，由牛顿的流体力学导出密度反差的演化方程变为

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{R}}{R}\dot{\delta}_k + \left(\frac{v_s^2 k^2}{R^2} - 4\pi G\rho_0\right)\delta_k = 0, \qquad (8.13.9)$$

其中的 R 仍是宇宙的尺度因子．把(8.13.9)与(8.13.4)相比，我们看到，金斯的引力不稳定性判据依然是适用的．但是这里有一点重要区别．背景介质的膨胀在扰动的演化方程中增加了一个阻尼项．当介质为静止，引力不稳定性的发生表现为 δ 的指数增长．而在膨胀介质中发生引力不稳定时，由于膨胀阻尼的影响，δ 的增长速率将明显地变慢，结团完成的时间将显著地推迟．

下面，我们讨论背景宇宙是实物为主且平坦的情形．这是理论上感兴趣的重要例子．由(8.4.4)知，$\dot{R}/R=(2/3)t^{-1}$，以及 $\rho_0=(6\pi Gt^2)^{-1}$．方程(8.13.9)化作

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0, \qquad (8.13.10)$$

这里已利用 $k \ll k_J$，从而已略去了压强的影响．方程(8.13.10)与 k 无关，所以密度反差的下标也略去了．易于解出这方程的两个线性独立解，它们分别代表扰动的两种独立的演化模式，

$$\delta_+(t) = \delta_+(t_i)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{2/3}, \quad \delta_-(t) = \delta_-(t_i)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{-1}, \qquad (8.13.11)$$

其中 δ_+ 代表增长模式，δ_- 代表衰减模式．对照背景宇宙的膨胀公式(8.4.4)，我们看到，在扰动发展的线性阶段，密度反差是与宇宙尺度因子 R 成正比地增大的．这使结团的初期变成了一个非常缓慢的过程．

微波背景辐射是在 $R/R_0=1\times10^{-3}$时形成的．由 δ 与 R 的正比性知，当时的密度反差至少须超过 1×10^{-3}，才可能在今天（即 $R=R_0$）之前实现物质的结团（即达到 $\delta\gg1$）．那时的密度反差是可以通过观测微波背景辐射中的温度各向异性来推断的．实际上，至今人们尚没有测到微波背景在星系尺度上的温度各向异性．从实测精度推知，当时的密度反差必小于 10^{-4}．这结果给星系的形成带来了时间不够的困难．直至 70 年代末，由于星系的形成理论太不成熟，因此人们还难以考虑这困难意味着什么．随后，中微子静质量的研究和宇宙暴胀的研究都给出了宇宙可能以非重子物质为主的启示．这概念对于星系形成的研究带来了很多积极的影响．让我们先回到星系形成的时间问题上来．

假设 $\Omega_0=1$ 的宇宙中有 80%以上由热或冷暗物质组成，而重子物质仅占 20%以下．理论分析表明，在这类宇宙模型中，非重子物质的密度扰动从实物与辐射等量时刻 t_{eq} 就开始增长，而重子物质中的扰动却要从光子退耦后才能开始增大．这样，在微波背景辐射形成时，物质主要部分中的密度反差已有一定的增大，但重子物质中的扰动却因尚未增长而相对较小（参看图 8.9）．当重子物质中的扰动开始增长时，由于非重子物质中已增大的密度产生了附加的引力，重子物质密度反差的增长速率加快了．图中的虚线示出若没有非重子影响时重子物质密度反差的增长．它至今天仍达不到结团的要求．实线示意地说明，尽管背景辐射形成时重子物质的密度反差显得过小，但在非重子物质的影响下，它能够在今天之前达到结团的需要．引入非重子为主的概念有可能使星系形成的时间困难得到缓解，这无疑对宇宙结构形成理论是重要的促进，它同时也是对宇宙以非重子为主的概念的支持．

从理论物理角度看，宇宙结构的形成问题是一个初值问题．如果我们能知道原初扰动产生的物理机制，从而算出各种尺度上的原初扰动幅度，又能知道影响扰动演化的各种要素，从而能写出扰动演化的可靠的方程式，那么今天宇宙物质的分布和运动状况

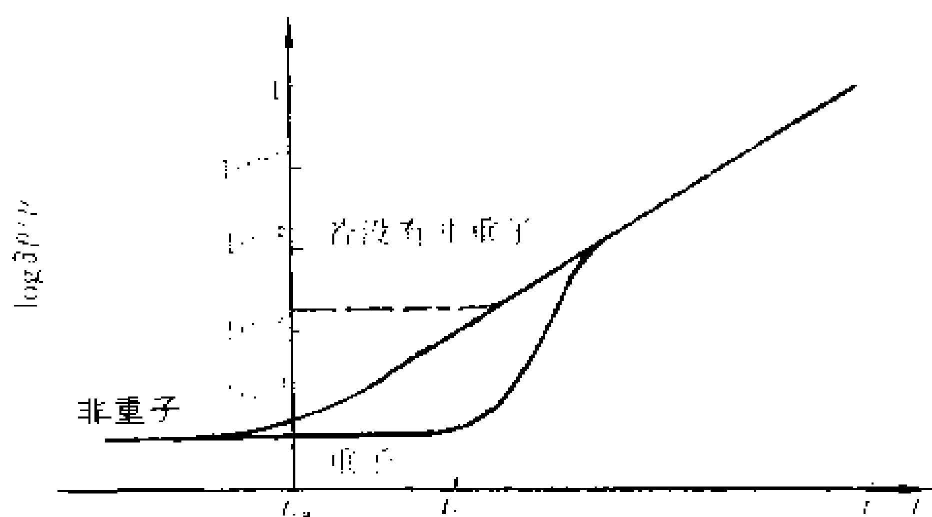


图 8.9 非重子为主宇宙中扰动的增长

就可以完全算出来．近十来年中，尽管沿这思路解决问题的条件还远不成熟，但宇宙学家们却开始了这种努力，并取得了不少成效．

关于原初扰动的问题，正如在§8.10中提到的，它只能产生在暴胀结束之前。按真空相变引起暴胀的机制，考虑到不同地点发生相变有先后，这将会导致密度起伏．定量计算表明，这机制产生的密度反差在重入视界时，不同波长有接近相同的振幅．这结果与哈里孙和泽尔道维奇从唯象分析所推测的结果是一致的．因此这种原初扰动谱成了理论家考虑初条件时的优先选择．

扰动进视界后的演化与背景宇宙介质的组分及总量有密切的关系．但人们对这两方面都尚缺乏可靠的知识．显然，最朴素的想法是认为今天的宇宙以重子物质为主．为此，人们着重讨论过 $\Omega_0=0.2$ 的低密模型及 $\Omega_0=1$ 的高密模型．但是这类模型都存在原初扰动幅度不够大，或说演化时间不够的困难．于是，尽管并没有大量非重子物质存在的直接证据，人们的注意力还是集中到了非重子为主的宇宙模型．

由于粒子物理方面的原因，首先被深入研究的是 $\Omega_0=1$ 的热暗物质为主的模型．按这模型，物质结团先发生在超星系团的尺度上，而后由碎裂而形成星系和星系团．从数值模拟的结果看，在超星系团和大空洞尺度上所得的结果与相应的巡天观测结果定性地符合很好．由于热暗物质在结构形成后仍分布得很弥漫，因此这模型也自然地解释了从星系和星系团尺度上测到的宇宙平均密度仅有 $\Omega_0\sim0.2$ 的原因．坏消息是模型在星系尺度上的行为与实际很难一致．例如要模型在红移为 2 或 3 时形成星系，则大尺度上与实际的符合就会被破坏．

自 80 年代中期，人们把更多的注意力转向了冷暗物质为主的模型．这模型中物质的结团先发生在亚星系尺度上，然后才通过并合而结成星系、星系团和超团．同样用数值模拟，发现这模型在中小尺度上很成功．例如对星系暗晕中的密度分布和转动曲线，星系的数密度，星系和星系的分布关联等，模型都给出了正确的结果．由于这类天文观测资料十分丰富而可靠，因此这方面的成功使人们对冷暗物质模型产生了很大的兴趣．可是模拟带来的也有坏消息．主要是模型在大尺度上产生的天象与实际符合得不好．至 90 年代初期，随着大尺度巡天资料的增加和质量的提高，高红移天体的发现，特别是微波背景辐射上大尺度温度各向异性的测定，人们逐渐意识到，冷暗物质为主的模型也并不是真实宇宙的好的写照．

90 年代以来，实测的发展迫使人们设想，今天的宇宙介质可能是一种复杂的混合物，其中重子物质、热暗物质、冷暗物质、甚至还有真空都可能占有不可忽略的百分比．如果这样，模型的不确定性就更大了，要得到可靠结论的困难也更大了．

从近十多年的研究看出，宇宙结构的形成问题是一个综合性的问题．它与暗物质的数量问题，暗物质的组分问题，宇宙常数问题，哈勃常数的测定及宇宙年龄问题，暴胀及原初扰动的起源问题，微波背景辐射的各向异性问题等都有密切的关系．在这些问

题都缺乏明确答案的基础上，要圆满地弄清结构的形成过程是不可能的．试探性的模型研究不仅在帮助人们逐步地弄清决定结构形成的各个物理要素，为问题的完全解决作准备，同时也会对各个相关问题的研究提供启示和根据．这种局面其实也是整个宇宙学的研究现状的反映．

宇宙学作为一个极端领域，它无疑是自然科学基础研究中最基本和最困难的领域之一．经过广义相对论建立以来的近 80 年的努力，人们已为它奠定了一个可靠的理论基础，并澄清了许多重要的方面．无论如何，宇宙学中未解决的问题比已解决的问题要多得多．宇宙学家们正在为赢得新的成功而继续努力．

附录 I　符号和约定

广义相对论中若干个基本量或基本公式的定义具有符号的任意性，因此同一物理公式在不同的书上会有符号的差别．本书采用的符号和约定说明如下：

1）四维时空指标用希腊字母标记．

2）三维空间指标用拉丁字母标记．

3）不变距离公式

$$ds^2 = +\, g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu.$$

4）闵柯夫斯基度规

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

5）黎曼张量

$$-\Gamma^{\rho}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} = +\, R^{\rho}_{\lambda\mu\nu}.$$

6）里契张量

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\lambda} = +\, R_{\mu\nu}.$$

7）爱因斯坦方程

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\, 8\pi G T_{\mu\nu}.$$

附录Ⅱ　物理常数

1） 基本常数

引力常数	$G=6.67\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$
光速	$c=2.998\times10^{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$
普朗克常数	$\hbar=1.055\times10^{-34}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$
玻耳兹曼常数	$k=1.381\times10^{-23}\ \mathrm{J\cdot K^{-1}}$
电子电荷	$e=1.601\times10^{-19}\ \mathrm{C}$
电子质量	$m_e=9.110\times10^{-31}\ \mathrm{kg}=0.511\ \mathrm{MeV}$
质子质量	$m_p=1.673\times10^{-27}\ \mathrm{kg}=0.9382\ \mathrm{GeV}$
中子质量	$m_n=1.675\times10^{-27}\ \mathrm{kg}=0.9395\ \mathrm{GeV}$

2） 天体常数

地球质量	$5.977\times10^{24}\ \mathrm{kg}$
地球平均半径	$6.371\times10^{6}\ \mathrm{m}$
地球轨道半径	$1.496\times10^{11}\ \mathrm{m}$
水星轨道半径	$5.546\times10^{10}\ \mathrm{m}$
水星公转周期	$0.2409\ \mathrm{a}$
太阳质量	$1.989\times10^{30}\ \mathrm{kg}$
太阳半径	$6.960\times10^{8}\ \mathrm{m}$
银河系质量	$3.6\times10^{41}\ \mathrm{kg}$
银河系直径	$30\sim50\ \mathrm{kpc}=(1\sim1.5)\times10^{21}\ \mathrm{m}$